18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Drei und sechzigster Band.

In vier Heften.

63

Berlin, 1864.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

R 9

Inhaltsverzeichniss des drei und sechzigsten Bandes.

Ueber die Wendungsberührebenen der Raumcurven. Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen. . . . . Seite 1

Ueber eine Transformation des Potentials. Von Herrn *G. Roch* zu Leipzig. — 9

Zur Theorie der algebraischen Flächen. Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen. — 14

Note über die Integration einer gewissen Gattung linearer Differentialgleichungen. Von Herrn *Simon Spitzer* zu Wien. . . . . — 27

Extrait d'une lettre de M. *Hermite* à M. *Brioschi.* . . . . . — 30

Nouvelles recherches sur l'élimination et la théorie des courbes. Par M. *A. Cayley* à Cambridge. . . . . — 34

Considérations géométriques, destinées à faciliter l'étude de la théorie des transcendantes elliptiques. Par M. *C. Küpper* à Trèves. . . . . — 40

Propriétés du systême des surfaces du second ordre conjuguées par rapport à un tétraèdre fixe. Par M. *Painvin* à Douai . . . . . — 58

Ueber einen Satz von *Steiner* und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung. Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen. . . . . — 94

Darstellung der Curven durch Krümmung und Torsion. (Fortsetzung zu Bd. 60, pag. 182.) Von Herrn *R. Hoppe.* . . . . . — 122

Sur les hyperboloïdes de rotation qui passent par une cubique gauche donnée. Par M. *L. Cremona* à Bologne. . . . . — 141

Ueber die Bewegung der Electricität in Leitern, mit Bezugnahme auf die Abhandlung des Herrn *G. Roch:* Anwendung der Potentialausdrücke auf die Theorie der molekularphysikalischen Fernewirkungen und der Bewegung der Electricität in Leitern im 61sten Bande dieses Journals pag. 283. Von Herrn *J. Weingarten.* . . . . . — 145

Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen. Von Herrn *F. G. Mehler* zu Danzig. . . . . — 152

Ueber die durch einen Magnet in einem rotirenden Stromleiter inducirten elektrischen Ströme. Von Herrn *E. Jochmann.* . . . . . — 158

Zur Involution. Von Herrn *Otto Hesse* zu Heidelberg. . . . . Seite 179
Bemerkung zu *Jacobis* Beweis für die Anzahl der Doppeltangenten. Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen. . . . . — 186
Ueber die Anwendung der *Abel*schen Functionen in der Geometrie. Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen. . . . . — 189
Note sur la transformation de la cubique ternaire en sa forme canonique. Par M. *William Spottiswoode* à Londres. . . . . — 244
Transformations-Formeln für rechtwinklige Raum-Coordinaten. Von Herrn *O. Hesse* zu Heidelberg. . . . . — 247
Ueber ein bestimmtes Integral. Von Herrn *L. Oettinger* zu Freiburg im Breisgau. . . . . — 252
Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn *Weierstrass*. Von Herrn *E. B. Christoffel* in Zürich. . . . . — 255
Ueber die kleinen Schwingungen eines periodisch eingerichteten Systems materieller Punkte. Von Demselben. . . . . — 273
Beitrag zur Theorie des Gleichgewichts eines nicht homogenen flüssigen rotirenden Sphäroids. Von Herrn *R. Lipschitz* zu Breslau. . . . . — 289
De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrariarum, et praecipue earum, quae per variabilis spatium finitum valorum maximorum et minimorum numerum habent infinitum, disquisitio. Auctore *R. Lipschitz*. . . . . — 296
Elementarer Beweis des *Pohlke*schen Fundamentalsatzes der Axonometrie. Von Herrn *H. Schwarz*. . . . . — 309
Sur la surface du quatrième ordre qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents. Par M. *L. Cremona* à Bologne. . . . . — 315
Nachschrift zu der Abhandlung über Induction in rotirenden Leitern, S. 158 dieses Bandes. Von Herrn *E. Jochmann*. . . . . — 329
Sur le déplacement d'une courbe, invariable de forme, qui reste tangente à une courbe fixe. Par M. *Edouard Combescure* à St. Etienne. . . . — 332
De functione potentiali duarum ellipsoidium homogenearum. Auctore *F. Mertens*. — 360
Druckfehlerverzeichniss. . . . . — 372

Ueber die Wendungsberührebenen der Raumcurven.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Herr *Salmon* bemerkt in seinem ausgezeichneten Werke über die analytische Geometrie des Raumes, p. 266, es sei ihm nicht gelungen, die Gleichung derjenigen Fläche in ihrer einfachsten Form aufzustellen, welche den Durchschnitt zweier Flächen vom m^{ten} und n^{ten} Grade in den Punkten trifft, die mit den drei ihnen nächstliegenden in einer Ebene enthalten sind. Die Schmiegungsebenen dieser Punkte gehen durch *vier* nächste Punkte, und sind wegen ihrer Analogie mit Wendetangenten ebener Curven Wendungsberührebenen genannt worden. Das Studium des genannten Werkes veranlasste mich, diese Untersuchung aufzunehmen, und die Umformung, welche durchzuführen mir gelungen ist, dürfte für die allgemeine Flächentheorie nicht ohne Interesse sein.

Sei $u=0$ eine Fläche der m^{ten}, $v=0$ eine Fläche der n^{ten} Ordnung. Bezeichnen wir mit u_i, v_i, u_{ik}, v_{ik} die Grössen:

$$(1.)\quad u_i=\frac{1}{m}\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad v_i=\frac{1}{n}\frac{\partial v}{\partial x_i},\quad u_{ik}=\frac{1}{m.m-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k},\quad v_{ik}=\frac{1}{n.n-1}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_k},$$

wo x_1, x_2, x_3, x_4 die Coordinaten eines Punktes x bedeuten. Man hat dann identisch:

$$(2.)\quad \begin{cases} u_i=\sum\limits_k u_{ik}x_k, & u=\Sigma u_k x_k,\\ v_i=\sum\limits_k v_{ik}x_k, & v=\Sigma v_k x_k. \end{cases}$$

Die Gleichung der Schmiegungsebene eines Punktes x, welcher in der Schnittcurve beider Flächen liegt, hat Herr *Hesse* (dieses Journal Bd. 41, p. 272) in der folgenden Form aufstellen gelehrt:

$$(3.)\quad 0=U(v_1X_1+v_2X_2+v_3X_3+v_4X_4)-V(u_1X_1+u_2X_2+u_3X_3+u_4X_4),$$

wo U, V die Covarianten bedeuten:

$$(4.)\quad U=(m-1)\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & v_1\\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & v_2\\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & v_3\\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & v_4\\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 \end{vmatrix},\quad V=(n-1)\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & u_1\\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & u_2\\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & u_3\\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & u_4\\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ich werde die Ableitung der Gleichung (3.) zunächst nochmals geben, da sich die Methode von *Hesse* vielleicht in einigen Punkten etwas abkürzen lässt. Die drei auf einander folgenden Punkte der Curve seien x, $x+dx$, $x+2dx+d^2x$; dann ist die Gleichung der Schmiegungsebene:

$$(5.) \qquad 0 = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \end{vmatrix}.$$

Zwischen den dx, d^2x erhält man durch Differentiation von $u=0$, $v=0$ folgende Relationen:

$$(6.) \qquad 0 = \Sigma u_i dx_i, \qquad 0 = \Sigma v_i dx_i,$$

$$(7.) \qquad \begin{cases} 0 = \Sigma u_i d^2x_i + (m-1)\Sigma\Sigma u_{ik} dx_i dx_k, \\ 0 = \Sigma v_i d^2x_i + (n-1)\Sigma\Sigma v_{ik} dx_i dx_k. \end{cases}$$

Da man zwischen den homogenen Coordinaten noch immer eine Gleichung

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 = 1$$

annehmen kann, so treten zu dieser noch die Gleichungen hinzu:

$$(8.) \qquad \Sigma k_i dx_i = 0, \quad \Sigma k_i d^2x_i = 0,$$

und man sieht, dass die Grössen dx proportional werden mit den Determinanten, welche man aus dem System

$$(9.) \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}$$

bildet.

Multiplicirt man die linke Seite von (5.) mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix},$$

wo die α, β irgend welche Grössen bedeuten, so wird das Product die Determinante

$$\begin{vmatrix} \Sigma u_i X_i & \Sigma v_i X_i & \Sigma \alpha_i X_i & \Sigma \beta_i X_i \\ 0 & 0 & \Sigma \alpha_i x_i & \Sigma \beta_i x_i \\ 0 & 0 & \Sigma \alpha_i dx_i & \Sigma \beta_i dx_i \\ \Sigma u_i d^2x_i & \Sigma v_i d^2x_i & \Sigma \alpha_i d^2x_i & \Sigma \beta_i d^2x_i \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung (5.) nimmt also mit Uebergehung eines überflüssigen Factors die Gestalt an:

$$\Sigma v_i X_i . \Sigma u_i d^2 x_i - \Sigma u_i X_i . \Sigma v_i d^2 x_i = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (7.):

$$(10.) \quad 0 = (m-1)\Sigma\Sigma u_{ik} dx_i dx_k . \Sigma v_i X_i - (n-1)\Sigma\Sigma v_{ik} dx_i dx_k . \Sigma u_i X_i .$$

Führen wir nun an Stelle von dx_i, dx_k die ihnen proportionalen Werthe ein, so treten an Stelle der Doppelsummen die Determinanten:

$$(11.) \quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_1 & v_1 & k_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_2 & v_2 & k_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_3 & v_3 & k_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & u_4 & v_4 & k_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_1 & u_1 & k_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & v_2 & u_2 & k_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & v_3 & u_3 & k_3 \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & v_4 & u_4 & k_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Um diese zu transformiren, hat man nur die ersten vier Horizontal- und Verticalreihen, mit x_1, x_2, ... multiplicirt, von der fünften abzuziehen. Dann verschwinden die Reihen der u_i in der ersten, die der v_i in der zweiten, und an Stelle der Nullen hat man die Systeme:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0, \end{matrix}$$

so dass die Determinanten (11.) übergehen in $-\frac{U}{m-1}$, $-\frac{V}{n-1}$. Die Gleichung (10.) reducirt sich hierdurch sofort auf die von *Hesse* gegebene Form.

Gehen wir nun zur Aufsuchung derjenigen Punkte x über, welche mit drei nächsten, $x+dx$, $x+2dx+d^2x$, $x+3dx+3d^2x+d^3x$, in einer Ebene, der Wendungsberührebene, liegen. Man kann erstlich diese Aufgabe mit directer Benutzung der Gleichung (3.) behandeln, indem man einen Punkt x der Schnittcurve sucht, dessen Schmiegungsebene mit der im nächsten Punkte $x+dx$ gelegten zusammenfällt. War die Gleichung der Schmiegungsebene im Punkte x:

$$0 = \Sigma X_i (U v_i - V u_i),$$

so ist die nächste Schmiegungsebene:

$$0 = \Sigma X_i [(U+dU)(v_i+dv_i) - (V+dV)(u_i+du_i)];$$

und die Bedingung, dass beide Ebenen zusammenfallen sollen, ist mit Hülfe eines willkürlichen Differentials dt ausgedrückt durch die vier Gleichungen:

$$(12.) \qquad v_i dU + U dv_i - u_i dV - V du_i = (Uv_i - Vu_i)\,dt.$$

Dies sind vier lineare Gleichungen für die fünf Grössen dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, dt, zwischen denen ausserdem noch die Gleichungen (6.), (8.) bestehen. Man wird daher durch Elimination jener fünf Grössen auf drei Gleichungen geführt, welche die Lage der fraglichen Punkte x vollständig bestimmen. Aber von jenen drei Gleichungen sind zwei die Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ selbst, wie man daraus sieht, dass mit Hülfe derselben die vier Gleichungen (12.) sich auf nur zwei von einander verschiedene reduciren. Weil nämlich aus den Gleichungen

$$\Sigma u_i dx_i = 0, \qquad \Sigma v_i dx_i = 0$$

auch die beiden anderen folgen:

$$\Sigma x_i du_i = 0, \qquad \Sigma x_i dv_i = 0,$$

so verschwindet die Summe der Gleichungen (12.), wenn man dieselben vor der Addition mit x_1, x_2, x_3, x_4 multiplicirt hat. Multiplicirt man aber jene Gleichungen mit dx_1, etc. und addirt, so kommt:

$$\begin{aligned} 0 &= U\Sigma dx_i dv_i - V\Sigma dx_i du_i \\ &= U\Sigma\Sigma(n-1)v_{ik}dx_i dx_k - V\Sigma\Sigma(m-1)u_{ik}dx_i dx_k. \end{aligned}$$

Aber die Doppelsummen sind dem Früheren nach mit U und V proportional, und es verschwindet also auch diese Combination.

Da sonach zwei Verbindungen der Gleichungen (12.) nichts Neues geben, so kann man jene Gleichungen durch irgend zwei andere Combinationen derselben ersetzen. Solche Combinationen nun erhält man auf folgende Art. Ordnen wir U und V nach denjenigen Grössen u_i, v_i, welche eine Reihe in ihrer Determinantenform bilden, und setzen demnach:

$$(13.) \qquad U = \Sigma v_k A_k, \qquad V = \Sigma u_k B_k.$$

Die Coefficienten A, B erfüllen die Bedingungen:

$$(14.) \qquad \begin{cases} \Sigma A_i u_i = 0, & \Sigma A_i du_i = 0, \\ \Sigma B_i v_i = 0, & \Sigma B_i dv_i = 0. \end{cases}$$

Denn diese Verbindungen unterscheiden sich von den Determinanten (4.) nur dadurch, dass an Stelle einer Reihe v_i von U entweder die u_i oder die du_i, und an Stelle einer Reihe u_i von V entweder die v_i oder die dv_i treten. Das Verschwinden der so entstehenden Determinanten übersieht man sofort.

Multiplicirt man nun die Gleichungen (12.) beziehungsweise mit A_1, A_2, ... oder mit B_1, B_2, ... und addirt, so entstehen folgende neue Combinationen:

$$(15.)\quad \begin{cases} dU+\Sigma A_i dv_i = U dt, \\ dV+\Sigma B_i du_i = V dt, \end{cases}$$

wo nur in der ersten Gleichung ein Factor U, in der zweiten ein Factor V übergangen ist.

Setzen wir, den früheren Bezeichnungen entsprechend,

$$U_i = \frac{1}{3m+2n-8}\frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad V_i = \frac{1}{3n+2m-8}\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

so gehen die Gleichungen (15.) auch über in:

$$\Sigma dx_i((3m+2n-8)U_i+(n-1)\Sigma A_k v_{ik}) = U dt,$$
$$\Sigma dx_i((3n+2m-8)V_i+(m-1)\Sigma B_k u_{ik}) = V dt.$$

Eliminirt man nun die dx, dt aus diesen Gleichungen in Verbindung mit (6.), (8.), so erhält man zunächst die Determinante:

$$\begin{vmatrix} (3m+2n-8)U_1+(n-1)\Sigma A_k v_{1k} & (3n+2m-8)V_1+(m-1)\Sigma B_k u_{1k} & u_1 & v_1 & k_1 \\ (3m+2n-8)U_2+(n-1)\Sigma A_k v_{2k} & (3n+2m-8)V_2+(m-1)\Sigma B_k u_{2k} & u_2 & v_2 & k_2 \\ (3m+2n-8)U_3+(n-1)\Sigma A_k v_{3k} & (3n+2m-8)V_3+(m-1)\Sigma B_k u_{3k} & u_3 & v_3 & k_3 \\ (3m+2n-8)U_4+(n-1)\Sigma A_k v_{4k} & (3n+2m-8)V_4+(m-1)\Sigma B_k u_{4k} & u_4 & v_4 & k_4 \\ U & V & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Aber wenn man die ersten vier Reihen beziehungsweise mit x_1, x_2, x_3, x_4 multiplicirt und sie von der letzten abzieht, nachdem diese mit $3m+3n-9$ multiplicirt worden, so verschwinden alle Elemente der letzten Reihe bis auf das letzte, und man kann die obige Gleichung daher durch die folgende ersetzen:

$$(16.)\quad \begin{vmatrix} (3m+2n-8)U_1+(n-1)\Sigma A_k v_{1k} & (3n+2m-8)V_1+(m-1)\Sigma B_k u_{1k} & u_1 & v_1 \\ (3m+2n-8)U_2+(n-1)\Sigma A_k v_{2k} & (3n+2m-8)V_2+(m-1)\Sigma B_k u_{2k} & u_2 & v_2 \\ (3m+2n-8)U_3+(n-1)\Sigma A_k v_{3k} & (3n+2m-8)V_3+(m-1)\Sigma B_k u_{3k} & u_3 & v_3 \\ (3m+2n-8)U_4+(n-1)\Sigma A_k v_{4k} & (3n+2m-8)V_4+(m-1)\Sigma B_k u_{4k} & u_4 & v_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Fläche der $(6m+6n-20)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Curve $u=0$, $v=0$ in den $nm(6m+6n-20)$ Berührungspunkten von Wendungsberührebenen schneidet.

Sind beide gegebenen Flächen von der zweiten Ordnung, so sind die Grössen $\Sigma A_k v_{ik}$, $\Sigma B_k u_{ik}$ von U_i, V_i nicht verschieden, und die Gleichung (16.)

reducirt sich auf die einfachere Form:

$$\Sigma \pm U_1 V_2 u_3 v_4 = 0.$$

Man bemerkt, dass die ganze Untersuchung wesentlich auf der Aufstellung der Gleichungen (15.) beruht. Diese Gleichungen kann man aber auch auf einem directeren Wege ableiten, indem man von der Gleichung der Schmiegungsebene keinen Gebrauch macht. Die Bedingung nämlich dafür, dass vier benachbarte Punkte der Curve $u = 0$, $v = 0$ in einer Ebene liegen, ist

$$\Sigma \pm x_1 dx_2 d^2x_3 d^3x_4 = 0.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $\Sigma \pm u_1 v_2 \alpha_3 \beta_4 = 0$, wo die α, β beliebige Grössen bedeuten, so verschwinden einige Glieder der resultirenden Determinante auf der linken Seite, und dieselbe löst sich in zwei Factoren auf, deren einer dem Problem fremd ist. Mit Uebergehung desselben findet sich dann:

$$(17.) \qquad \begin{vmatrix} \Sigma u_i d^2x_i & \Sigma u_i d^3x_i \\ \Sigma v_i d^2x_i & \Sigma v_i d^3x_i \end{vmatrix} = 0.$$

Die Glieder der ersten Verticalreihe sind schon oben proportional mit U, V gefunden; denn bezeichnet man die aus dem System (9.) entspringenden Determinanten durch $\frac{dx_1}{ds}$, $\frac{dx_2}{ds}$ etc., so wird

$$(18.) \qquad \begin{cases} \Sigma u_i d^2x_i = -U ds^2, \\ \Sigma v_i d^2x_i = -V ds^2. \end{cases}$$

Differentiirt man nun diese Gleichungen noch einmal, indem man ds als constantes Differential betrachtet, so findet sich:

$$(19.) \qquad \begin{cases} \Sigma u_i d^3x_i = -(m-1)\Sigma\Sigma u_{ik} d^2x_i dx_k - ds^2 dU, \\ \Sigma v_i d^3x_i = -(n-1)\Sigma\Sigma v_{ik} d^2x_i dx_k - ds^2 dV. \end{cases}$$

Da nun die $\frac{dx_i}{ds}$ die aus dem System (9.) entspringenden Partialdeterminanten waren, so sind die Grössen $\frac{d^2x_i}{ds^2}$ die Summen der entsprechenden aus den beiden Systemen

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}$$

gebildeten Partialdeterminanten, und man hat also:

$$(m-1)\Sigma\Sigma u_{ik}\frac{d^2x_i}{ds^2}\frac{dx_k}{ds} = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}$$

$$= -(m-1)\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_1 & v_1 & k_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_2 & v_2 & k_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_3 & v_3 & k_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & u_4 & v_4 & k_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$(n-1)\Sigma\Sigma v_{ik}\frac{d^2x_i}{ds^2}\frac{dx_k}{ds} = -\begin{vmatrix} \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} \\ \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}$$

$$= -(n-1)\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & u_1 & v_1 & k_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & u_2 & v_2 & k_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & u_3 & v_3 & k_3 \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & u_4 & v_4 & k_4 \\ \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Verfährt man nun mit diesen Determinanten auf die gewöhnliche Weise, um in der ersten die Reihen u_i, in der anderen die der v_i zu zerstören, so erhält man an ihrer Stelle:

$$(m-1)\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & v_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & v_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & v_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & v_4 \\ \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} & 0 \end{vmatrix} = A_1\frac{dv_1}{ds} + A_2\frac{dv_2}{ds} + A_3\frac{dv_3}{ds} + A_4\frac{dv_4}{ds},$$

$$(n-1)\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & u_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & u_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & u_3 \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & u_4 \\ \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} & 0 \end{vmatrix} = B_1\frac{du_1}{ds} + B_2\frac{du_2}{ds} + B_3\frac{du_3}{ds} + B_4\frac{du_4}{ds}.$$

Führt man dies nebst (18.), (19.) in die Gleichung (17.) ein, so nimmt diese Gleichung die Gestalt an:

$$\begin{vmatrix} dU + \Sigma A_i dv_i & U \\ dV + \Sigma B_i dv_i & V \end{vmatrix} = 0,$$

was offenbar mit den zu erweisenden Gleichungen (15.) identisch ist. Es sind also auf diesem directen Wege die Gleichungen abgeleitet, auf welche sich oben die Herleitung der Gleichung (16.) stützte.

Carlsruhe, den 3ten September 1862.

Ueber eine Transformation des Potentials.

(Von Herrn *G. Roch* zu Leipzig.)

---

1. Eine für alle reellen Werthe der Variabeln endliche, im Unendlichen verschwindende Function kann immer durch ein *Fourier*sches Doppelintegral ausgedrückt werden:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, e^{is(x-\lambda)}\, ds\, d\lambda.$$

Auch die Differentialquotienten der Function sind, wenn sie überall endlich vorausgesetzt werden, dieser Darstellung fähig:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(\lambda)}{d\lambda}\, e^{is(x-\lambda)}\, ds\, d\lambda.$$

Ist $f(\lambda)$ stetig zwischen $\lambda = -\infty$ und $+\infty$, so giebt die partielle Integration:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(\lambda)}{d\lambda}\, e^{is(x-\lambda)}\, ds\, d\lambda = \left(f(\lambda)\, e^{is(x-\lambda)}\right)_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \frac{de^{is(x-\lambda)}}{d\lambda}\, ds\, d\lambda,$$

oder, da $f(\pm\infty) = 0$,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, e^{is(x-\lambda)}\, s\, ds\, d\lambda;$$

ist auch die Derivirte $f'(\lambda)$ eine stetige Function, so kann man in

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f'(\lambda)\, e^{is(x-\lambda)}\, s\, ds\, d\lambda$$

dieselbe partielle Integration ausführen und erhält:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, e^{is(x-\lambda)}\, s^2\, ds\, d\lambda \text{ etc.}$$

Dasselbe gilt genau so für Functionen mehrerer Variabeln und ihre Ausdrücke durch mehrfache *Fourier*sche Integrale; sei z. B. $f(x, y, z)$ sammt den ersten Derivirten nach x, y, z stetig und endlich für alle x, y, z, und Null im Unendlichen, während die zweiten Derivirten von f überall zwar endlich, im Unendlichen Null sein, aber sprungweise Aenderungen haben können: so hat man

$$(1.)\quad f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \mu, \nu)\, e^{i\,(p(x-\lambda)+q(y-\mu)+r(z-\nu))}\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\, dp\, dq\, dr$$

und

$$(2.)\quad \frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}+\frac{d^2f}{dz^2}=-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda,\mu,\nu)\,e^{i(p(x-\lambda)+\cdots)}(p^2+q^2+r^2)\,d\lambda\ldots dr.$$

2. In der *Fourier*schen Formel dürfen wir die Reihenfolgen der Integrationen beliebig vertauschen; dann wird immer auch noch wegen der Identität dieser Ausdrücke ihr Differentiiren erlaubt bleiben. Führen wir nun anstatt p, q, r Polarcoordinaten s, ψ, θ ein:

$$p=s.\cos\psi,\quad q=s.\sin\psi\cos\theta,\quad r=s.\sin\psi\sin\theta:$$

transformiren wir ferner λ, μ, ν durch Einführung einer orthogonalen Substitution λ_1, μ_1, ν_1, so dass λ_1 gegen λ, μ, ν Neigungswinkel hat, deren Cosinus $\cos\psi$, $\sin\psi\cos\theta$, $\sin\psi\sin\theta$ resp. seien; ebenso seien x_1, y_1, z_1 von x, y, z abhängig. Dann geht $p(x-\lambda)+q(y-\mu)+r(z-\nu)$ in $s(x_1-\lambda_1)$ über: $d\lambda\,d\mu\,d\nu$ wird $d\lambda_1 d\mu_1 d\nu_1$, $dp\,dq\,dr$ wird $s^2 ds\sin\psi\,d\psi\,d\theta$; daher entsteht, wenn $f(\lambda,\mu,\nu)$ in $f_1(\lambda_1,\mu_1,\nu_1)$ übergeht:

$$f(x,y,z)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin\psi\,d\psi\,d\theta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\lambda_1,\mu_1,\nu_1)\,e^{is(x_1-\lambda_1)}s^2\,ds\,d\lambda_1\,d\mu_1\,d\nu_1.$$

Nach den über f oder f_1 gemachten Voraussetzungen ist jedenfalls auch

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\lambda_1,\mu_1,\nu_1)\,d\mu_1\,d\nu_1=F(\lambda_1)$$

eine sammt ihrer ersten Derivirten stetige Function, und

$$\varphi(x_1)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda_1)\,e^{is(x_1-\lambda_1)}s^2\,ds\,d\lambda_1$$

der Darstellung durch ein *Fourier*sches Integral fähig:

$$\varphi(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda_1)\,e^{is(x_1-\lambda_1)}\,ds\,d\lambda_1.$$

Dadurch geht f über in

$$(3.)\quad f(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin\psi\,d\psi\,d\theta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda_1)\,e^{is(x_1-\lambda_1)}\,s^2\,ds\,d\lambda_1,$$

und die Differentiation dieser mit (1.) ganz identischen Formel giebt analog (2.):

$$(4.)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin\psi\,d\psi\,d\theta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda_1)\,e^{is(x_1-\lambda_1)}\,s^2\,ds\,d\lambda_1:$$

da

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 x_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}=1.$$

3. Die eben durchgeführte Transformation der *Fourier*schen Formel gilt auch für Functionen, die sprungweise Aenderungen haben, da man immer $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-x}^{x}\int_{-x}^{x} F(\lambda_1)\, e^{is(x_1-\lambda_1)} s^2\, ds\, d\lambda_1$ als Factor von $\sin\psi\, d\psi\, d\theta$ erhalten wird, sobald f der Darstellung durch das sechsfache *Fourier*sche Integral fähig ist. Seien also irgend welche Massen im Raume vertheilt, so dass ihre Dichte eine Function $m(x, y, z)$ der Coordinaten sei, die im Unendlichen Null, im Endlichen überall endlich ist, aber sprungweise Aenderungen haben kann; sei

$$M(\lambda_1) = \int_{-x}^{x}\int_{-x}^{x} m_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)\, d\mu_1 d\nu_1,$$

dann kann M als das Gewicht einer Ebene betrachtet werden, die mit der mittleren längs derselben herrschenden räumlichen Dichte belastet ist; ist die gegebene Masse ein homogener Körper von der Dichte 1, so ist M der durch x, y, z gelegte Querschnitt, dessen Normale die durch ψ, θ bestimmte Richtung hat; wir wollen daher M immer als Querschnitt bezeichnen, darunter bei variabler Dichte den durch die mittlere längs desselben herrschenden Raumdichte als Gewicht belasteten Querschnitt verstanden;

$$m(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\ldots\int m_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)\, e^{i(p(x-\lambda)+\ldots)}\, dp \ldots d\nu$$

ist bei dieser Bezeichnung identisch mit:

$$(5.) \qquad m(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin\psi\, d\psi\, d\theta \int_{-x}^{x}\int_{-x}^{x} M(\lambda_1)\, e^{is(x_1-\lambda_1)} s^2\, ds\, d\lambda_1.$$

Betrachtet man $-4\pi m$ als $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ in (4.), so wird sich für $f(x, y, z)$ der Ausdruck ergeben:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin\psi\, d\psi\, d\theta \int_{-x}^{x}\int_{-x}^{x} M(\lambda_1)\, e^{is(x_1-\lambda_1)}\, ds\, d\lambda_1$$

oder

$$(6.) \qquad f(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin\psi\, d\psi\, d\theta\, M(x_1).$$

Einige Bemerkungen werden diese Entwickelung ganz streng zum Abschlusse bringen; wie bekannt, genügt das Potential einer Massenvertheilung m, die im Endlichen endlich, im Unendlichen Null ist, den Bedingungen, die nach 1. nöthig sind, damit der Ausdruck durch das *Fourier*sche Integral zweimal differentiirt werden darf; denn dasselbe ist sammt seinen ersten Derivirten überall endlich, stetig, im Unendlichen Null; denkt man sich das Potential durch eine

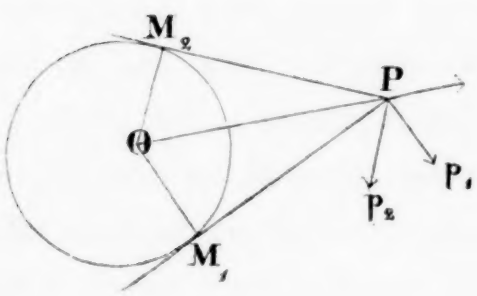
Formel wie (3.) ausgedrückt, so ist es also erlaubt, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ daraus herzuleiten; da nun (4.) mit (5.) bis auf constante Factoren identisch wird, wenn man $\varphi(\lambda_1)$ durch $M(\lambda_1)$ ersetzt, so muss auch (6.) mit der differentiirbaren Formel (3.) identisch werden, wenn φ durch M ersetzt wird, da die Darstellung sowohl von f als $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ durch Ausdrücke (3.) oder (4.) wegen der Eindeutigkeit ihrer Darstellung durch *Fourier*sche Integrale auch nur auf eine Weise möglich ist. Es muss also $f(x, y, z)$ der genaue Ausdruck des Potentials sein, welches von den Massen herrührt.

Die Grenzen der Integration sind 0 und π für ψ sowohl als θ, da s, die dritte Polarcoordinate, von $-\infty$ bis $+\infty$ variirt wird; liegt x, y, z ausserhalb des von Massen erfüllten Volumens, so sind die M ausserhalb gewisser Grenzen Null; auf diese Veränderlichkeit der Grenzen braucht man beim Differentiiren von (1.) nicht Rücksicht zu nehmen; es genügt, um die Summe der zweiten Differentialquotienten zu bilden, den Factor von $ds\sin\psi\, d\psi\, d\theta$ mit $-s^2$ zu multipliciren; für äussere Punkte bestimmen sich die Grenzen von ψ und θ in (6.) durch die von denselben an die Oberfläche gelegten Tangentialebenen; der von den Normalen dieser letzteren gebildete Kegel, die Normalen immer nach derselben Seite genommen, giebt die Werthe von ψ und θ an, innerhalb deren die M endlich sind.

4. Nur um die Art der Anwendung von (6.) zu zeigen, will ich die Kugel von der Dichte 1 als Beispiel anführen:

A sei der Radius der Kugel, a die Entfernung des angegebenen Punktes P vom Mittelpunkt O; OP werde als Polarachse angenommen; dann sind die Querschnitte, die durch P gehen, von θ unabhängig gleich $(A^2-a^2\cos^2\psi)\pi$, und es ist für innere Punkte:

$$f(a) = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}(A^2-a^2\cos^2\psi)\sin\psi\, d\psi\, d\theta = 2\pi A^2-\frac{2\pi}{3}a^2.$$



Für äussere Punkte sind (s. d. Figur) $Pp_1(\perp PM_1)$ und $Pp_2(\perp PM_2)$ die äussersten Lagen der Normale, oder $\cos\psi = z$ geht von $\frac{A}{a}$ bis $-\frac{A}{a}$;

$$f(a) = \pi\int_{-\frac{A}{a}}^{\frac{A}{a}}(A^2-a^2z^2)\,dz = \frac{4\pi}{3}\,\frac{A^3}{a}.$$

Die Formel (3.) enthält, auf einen beliebig gegebenen Schwingungszustand im Aether oder in einem begränzten Körper angewandt, die Darstellung dieser Schwingung als Resultirende von Wellenebenen, die durch jeden Punkt nach allen möglichen Richtungen gehen. Man erkennt daraus, dass es fehlerhaft ist, wenn man bei Wellenebenen, die z. B. eine Kugelfläche umhüllen, nur diese Kugelfläche als leuchtend annimmt. Irrthümer dieser Art finden sich in den meisten Handbüchern der analytischen Optik; sie haben aber wenig oder gar keinen Einfluss auf die Richtigkeit der Resultate.

Leipzig, 1863.

Zur Theorie der algebraischen Flächen.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Eine Oberfläche n^{ter} Ordnung wird, wie Herr *Salmon* und ich bewiesen haben, von einer bestimmten Fläche $11n-24^{ster}$ Ordnung in einer Curve geschnitten, in deren Puncten eine Gerade die Fläche vierpunctig berühren kann. Von den besonderen Puncten dieser Curve habe ich im 58sten Bande dieses Journals diejenigen untersucht, in denen eine fünfpunctige Berührung möglich wird, sowie die Doppelpuncte derselben, d. h. Puncte, in denen *zwei* Gerade die Fläche vierpunctig berühren können. Durch die letzteren Puncte geht, wie ich a. a. Orte gezeigt habe, ein System von Flächen der $10n-18^{ten}$ Ordnung. Im Folgenden werde ich zeigen, dass man diese Puncte durch ein Flächensystem niedrigerer Ordnung, nämlich von der Ordnung $8n-14$ bestimmen kann, und werde überhaupt die Anzahl jener Puncte angeben. Das neue Flächensystem ist namentlich in Bezug auf die Flächen dritter Ordnung von grosser Wichtigkeit. Es wird für dieselben von der zehnten Ordnung; und der Durchschnitt der 27 Geraden mit irgend einer dieser Flächen liefert sofort die 135 Schnittpuncte der 27 Geraden unter einander, von denen 10 auf jeder der Geraden liegen.

§. 1.

Sei x ein beliebiger Punct, u eine homogene Function n^{ter} Ordnung von x_1, x_2, x_3, x_4, also $u=0$ die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung. Ist y ein zweiter Punkt, so geht die Gleichung $u=0$, wenn man darin $x+\lambda y$ an Stelle von x setzt, über in

$$(1.) \qquad u+n\lambda Du+\frac{n.n-1}{2}\lambda^2 D^2u+\cdots = 0.$$

Ich werde im Folgenden immer, wenn φ eine homogene Function μ^{ter} Ordnung von x_1, x_2, x_3, x_4 ist, durch φ_k den Ausdruck bezeichnen:

$$\varphi_k = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}.$$

In diesem Sinne ist:

$$\begin{aligned} Du &= y_1u_1+y_2u_2+y_3u_3+y_4u_4, \\ D^2u &= y_1(Du)_1+y_2(Du)_2+y_3(Du)_3+y_4(Du)_4, \\ D^3u &= y_1(D^2u)_1+y_2(D^2u)_2+y_3(D^2u)_3+y_4(D^2u)_4, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Die Gleichung (1.) aber ist, wenn x, y gegebene Puncte sind, eine Gleichung n^{ten} Grades für λ, und die entsprechenden n Puncte $x+\lambda y$ sind die Schnittpuncte der Verbindungslinie xy mit der gegebenen Fläche.

Liegt x in der Fläche, so ist $u=0$, und eine Wurzel λ verschwindet. Ist die Gerade xy Tangente, so ist auch $Du=0$, und eine zweite Wurzel λ verschwindet. Soll die Gerade xy Haupttangente in x werden, so muss auch noch $D^2u=0$ sein; und endlich muss D^3u verschwinden für die Puncte x der Fläche, in welchen eine vierpunktige Berührung möglich ist. Für die hier untersuchten Puncte soll es zwei berührende Gerade dieser Art geben. Sieht man also die Gleichungen

$$(2.) \qquad Du=0, \quad D^2u=0, \quad D^3u=0$$

als Gleichungen von Flächen an, deren laufende Coordinaten die y sind, so müssen diese drei Flächen zwei Gerade mit einander gemein haben.

Von den drei Flächen (2.) ist die erste vom ersten Grade, die zweite vom zweiten, und zwar ist, nach der Bildung der Ausdrücke Du, D^2u, und mit Rücksicht darauf, dass wegen $u=0$ beide Flächen durch den Punct x gehen, $Du=0$ die Tangentenebene von $D^2u=0$ im Puncte x. Beide Flächen schneiden sich also in einem Linienpaare; und dieses muss also der Forderung nach in der Fläche dritter Ordnung $D^3u=0$ enthalten sein.

Hiernach muss man immer solche Functionen A, B vom ersten und zweiten Grade für die y auffinden können, dass, identisch in Bezug auf die y,

$$(3.) \qquad D^3u = \mathrm{A}.D^2u+\mathrm{B}.Du.$$

Diese Gleichung stellt 20 verschiedene Gleichungen dar, welche man erhält, indem man die Coefficienten entsprechender Glieder vergleicht. Sind α_i, β_{ik} die Coefficienten in A, B, so sind diese 20 Gleichungen in dem Schema enthalten:

$$(4.) \qquad 3u_{hik} = \alpha_h u_{ik}+\alpha_i u_{kh}+\alpha_k u_{hi}+\beta_{hi}u_k+\beta_{ik}u_h+\beta_{kh}u_i.$$

Diese Gleichungen, verbunden mit $u=0$, müssen die Bestimmung der gesuchten Doppelpuncte x leisten.

Es ist ein sehr bemerkenswerther Umstand, dass man die Coefficienten α von vorn herein einfach und symmetrisch durch die x ausdrücken kann. Setzt man

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots,\\
\beta_i &= \beta_{i1}x_1+\beta_{i2}x_2+\cdots,\\
\beta &= \beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\cdots,
\end{aligned}$$

so erhält man aus (4.), wenn man mit x_k multiplicirt und nach k summirt, zunächst:

$$(5.) \qquad 3u_{hi} = \alpha_h u_i + \alpha_i u_h + \alpha u_{hi} + \beta_h u_i + \beta_i u_h;$$

sodann aber, wenn man mit x_i multiplicirt und nach i summirt:

$$3u_h = 2\alpha u_h + \beta u_h,$$

oder, da im Allgemeinen nicht alle u_h gleichzeitig verschwinden können:

$$(6.) \qquad 3 = 2\alpha + \beta.$$

Sei nun ferner Δ die aus den u_{ik} gebildete *Hesse*sche Determinante, U_{ik} ihre Unterdeterminanten. Da Δ vom Grade $4(n-2)$ ist, so hat man der oben festgesetzten Bezeichnungsweise zufolge:

$$4(n-2)\Delta_h = \Sigma\Sigma U_{ik}.(n-2)u_{ikh},$$

oder

$$4\Delta_h = \Sigma\Sigma U_{ik} u_{ikh}.$$

Führen wir in dieser Gleichung für u_{ikh} die Werthe ein, welche sie nach (4.) für die fraglichen Puncte annehmen sollen. Wir haben dann:

$$\begin{aligned} 12\Delta_h &= \alpha_h \Sigma\Sigma U_{ik} u_{ik} + 2\Sigma\Sigma \alpha_i U_{ik} u_{kh} \\ &\quad + u_h \Sigma\Sigma U_{ik} \beta_{ik} + 2\Sigma\Sigma u_i U_{ik} \beta_{kh}. \end{aligned}$$

Nach bekannten Sätzen ist nun:

$$\Sigma\Sigma U_{ik} u_{ik} = 4\Delta, \qquad \Sigma\Sigma \alpha_i U_{ik} u_{kh} = \alpha_h \Delta,$$
$$\Sigma\Sigma u_i U_{ik} \beta_{kh} = \Sigma\Sigma\Sigma u_{im} x_m U_{ik} \beta_{kh} = \beta_h \Delta,$$

und demnach:

$$12\Delta_h = 6\alpha_h \Delta + 2\beta_h \Delta + u_h \Sigma\Sigma U_{ik} \beta_{ik}.$$

Setzt man noch der Kürze wegen:

$$(7.) \qquad \Sigma\Sigma U_{ik} \beta_{ik} = 4M,$$

so wird dies:

$$(8.) \qquad 12\Delta_h = (6\alpha_h + 2\beta_h)\Delta + 4u_h . M;$$

und wenn man mit x_h multiplicirt und nach h summirt:

$$12\Delta = (6\alpha + 2\beta)\Delta, \quad \text{d. h.}$$
$$6 = 3\alpha + \beta.$$

Vergleicht man dies mit (6.), so findet sich:

$$\alpha = 3, \qquad \beta = -3.$$

Die Gleichung (5.) geht sofort, indem u_{hi} ganz herausfällt, über in

$$0 = (\alpha_h + \beta_h) u_i + (\alpha_i + \beta_i) u_h.$$

Man braucht nur $h=i$ zu setzen, um daraus zu finden:

$$(9.) \qquad \alpha_i = -\beta_i,$$

und endlich aus (8.):

$$(10.) \qquad \alpha_h = \frac{3\Delta_h - Mu_h}{\Delta}.$$

Dies ist die gesuchte Bestimmung der α. Führt man die erhaltenen Werthe in (4.) ein, und setzt

$$(11.) \qquad \Delta\beta_{ik} - Mu_{ik} = 3\gamma_{ik},$$

so nimmt jene Gleichung die Gestalt an:

$$(12.) \qquad \Delta . u_{hik} = \Delta_h u_{ik} + \Delta_i u_{kh} + \Delta_k u_{hi} + u_h\gamma_{ik} + u_i\gamma_{kh} + u_k\gamma_{hi};$$

wo nur noch die γ als unbestimmte Coefficienten auftreten. Und die Combination von (9.), (10.), (11.) liefert noch die Bestimmung:

$$(13.) \qquad \gamma_i = -\Delta_i.$$

Die Gleichung (12.) enthält bereits eines der oben erwähnten allgemeinen Resultate. Multiplicirt man nämlich mit $y_iy_ky_h$ und summirt, so erhält man die Gleichungen (12.) in die eine Gleichung zusammengefasst:

$$(14.) \qquad \Delta . D^3u = 3D\Delta . D^2u + 3U . Du.$$

Diese Gleichung, welche für die y identisch ist, muss auch noch bestehen, wenn man für die y die Coordinaten eines Punctes setzt, welcher auf $Du=0$ und ausserdem auf der Verbindungslinie zweier beliebig gegebenen Puncte a, b liegt. Es ist dann $y_i = \lambda a_i + \mu b_i$, und das Verhältniss $\frac{\lambda}{\mu}$ bestimmt sich aus der Gleichung $\lambda\Sigma a_iu_i + \mu\Sigma b_iu_i = 0$, so dass man für λ, μ selbst die Ausdrücke $(n-1)^{ten}$ Grades Σb_iu_i, $-\Sigma a_iu_i$ setzen kann.

Setzt man also diese Ausdrücke in (14.) ein, so stellt jene Gleichung eine Fläche der $(8n-14)^{ten}$ Ordnung dar, welche die gesuchten Doppelpuncte enthalten muss. Und da man den Grössen a, b alle möglichen Werthe beilegen kann, so ist hierdurch der Satz bewiesen:

Durch die gesuchten Doppelpuncte gehen unendlich viele Flächen der $(8n-14)^{ten}$ Ordnung.

Die Gleichung (14.) führt noch zu einem anderen Satze. Die Gleichung $Du=0$ stellt die Tangentenebene ($(n-1)^{te}$ Polare) des Punctes x in Bezug auf $u=0$ dar, $D^2u=0$ die $(n-2)^{te}$ Polare, $D^3u=0$ die $(n-3)^{te}$. Zugleich ist $D\Delta=0$ die letzte Polare des Punctes x in Bezug auf die *Hesse*sche Fläche, und so kann man den Satz aussprechen:

Die Tangentenebene an $u=0$ in einem der gesuchten Doppelpuncte wird von seiner, in Bezug auf $u=0$ genommenen, $(n-3)^{ten}$ Polare in drei Geraden geschnitten. Von diesen sind zwei die Haupttangenten des Punctes, die dritte aber ist der Schnitt der Tangentenebene mit der in Bezug auf die Hessesche Fläche genommenen letzten Polare des Doppelpunctes.

§. 2.

Dieser Satz ist indessen nichts als ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes, welchen ich jetzt beweisen will, nämlich:

Die Ebene der Puncte, deren in Bezug auf die Hessesche Fläche genommene Polare durch einen gegebenen Punct der Fläche $u=0$ geht, schneidet die Schnittcurve der diesem Puncte entsprechenden Fläche dritter Ordnung $D^3u=0$ und der Tangentenebene von $u=0$ in diesem Puncte in der Verbindungslinie derjenigen drei Wendepuncte der Schnittcurve dritter Ordnung, welche nicht in den Doppelpunct (Berührungspunct) fallen.

Und insbesondere für Flächen dritter Ordnung, wo $D^3u=0$ mit $u=0$ identisch wird:

Die Ebene der Puncte, deren in Bezug auf die Hessesche Fläche genommene Polare durch einen gegebenen Punct der Fläche dritter Ordnung $u=0$ geht, schneidet die Schnittcurve von $u=0$ mit der Tangentenebene jenes Punctes in der Verbindungslinie derjenigen drei ihrer Wendepuncte, welche nicht in den Berührungspunct fallen.

Es genügt offenbar den zweiten Satz zu beweisen. Denn da in dem ersten nicht höhere als dritte Differentialquotienten von $u=0$ benutzt werden. so kann man die Werthe, welche dieselben für den gegebenen Punct annehmen, mit denen vertauschen, welche man aus $D^3u=0$ ableitet, oder man kann überhaupt die Fläche dritter Ordnung $D^3u=0$ an Stelle von $u=0$ setzen, wodurch der erste Satz auf den zweiten zurückgeführt ist.

Um nun den zweiten Satz zu beweisen, denke ich mir für den Augenblick unter $m=0$ die Gleichung der Tangentenebene des gegebenen Punctes x, und unter $a=0$, $b=0$ zwei durch die Haupttangenten desselben gelegte Ebenen; endlich unter $c=0$ die Gleichung einer Ebene, welche durch die drei Wendepuncte der Curve dritter Ordnung geht, in welcher $u=0$ von $m=0$ geschnitten wird. Dann muss für $m=0$ die Gleichung $u=0$ sich reduciren auf

$$a^3+b^3+6abc=0,$$

d. h. man muss identisch haben:

$$u = 3mv + a^3 + b^3 + 6abc,$$

wo v eine Function der zweiten Ordnung ist.

Man findet daraus:

$$u_i = m_i v + 2mv_i + a^2 a_i + b^2 b_i + 2abc_i + 2acb_i + 2cba_i,$$

$$u_{ik} = m_i v_k + m_k v_i + m v_{ik} + a a_i a_k + b b_i b_k + a(b_i c_k + c_i b_k) + b(c_i a_k + a_i c_k) + c(a_i b_k + b_i a_k).$$

Für den Punct x hat man $a = 0$, $b = 0$, $m = 0$; daher ist wirklich u_i mit m_i proportional, d. h. $m = 0$ ist die Tangentenebene in x; zugleich aber wird:

$$u_{ik} = m_i v_k + m_k v_i + c(a_i b_k + a_k b_i).$$

Setzt man also noch

$$r = \Sigma \pm m_1 v_2 a_3 b_4,$$

so hat man für den Punct x:

$$\Delta = c^2 r^2, \qquad U_{ik} = c^2\left(\frac{\partial r}{\partial m_i}\frac{\partial r}{\partial v_k} + \frac{\partial r}{\partial m_k}\frac{\partial r}{\partial v_i}\right) + c\left(\frac{\partial r}{\partial a_i}\frac{\partial r}{\partial b_k} + \frac{\partial r}{\partial a_k}\frac{\partial r}{\partial b_i}\right).$$

Bezeichnet man nun alles einem beliebigen anderen Puncte $\bar{x}$ Entsprechende durch einen Horizontalstrich, so ist die Gleichung der letzten Polare von x in Bezug auf Δ oder die Gleichung der Ebene, für deren Puncte die in Bezug auf Δ genommene Polare durch x hindurchgeht:

$$4\Sigma\bar{x}_i\Delta_i = \Sigma\Sigma\bar{u}_{ik}U_{ik} = 0$$

$$= \Sigma\Sigma\left\{c^2\left(\frac{\partial r}{\partial m_i}\frac{\partial r}{\partial v_k} + \frac{\partial r}{\partial m_k}\frac{\partial r}{\partial v_i}\right) + c\left(\frac{\partial r}{\partial a_i}\frac{\partial r}{\partial b_k} + \frac{\partial r}{\partial a_k}\frac{\partial r}{\partial b_i}\right)\right\} \times$$

$$\times\{m_i\bar{v}_k + m_k\bar{v}_i + \bar{m}v_{ik} + \bar{a}a_i a_k + \bar{b}b_i b_k + \bar{a}(b_i c_k + c_i b_k) + \bar{b}(c_i a_k + a_i c_k) + \bar{c}(a_i b_k + b_i a_k)\},$$

was sich bei Ausführung der Summen sofort vereinfacht zu:

$$0 = cr\Sigma\bar{v}_i\frac{\partial r}{dv_i} + c\bar{m}\Sigma\Sigma v_{ik}\frac{\partial r}{\partial m_i}\frac{\partial r}{\partial v_k} + \bar{m}\Sigma\Sigma v_{ik}\frac{\partial r}{\partial a_i}\frac{\partial r}{\partial b_k} + r\bar{a}\Sigma c_i\frac{\partial r}{\partial a_i} + r\bar{b}\Sigma c_i\frac{\partial r}{\partial b_i} + \bar{c}r^2.$$

Da inzwischen die Determinante

(15.)
$$\left\{\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \bar{m} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \bar{v}_1 x_1 + \bar{v}_2 x_2 \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \bar{a} \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \bar{b} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \bar{c} \end{vmatrix}\right.$$

$$\left. = \bar{c}r - \bar{m}\Sigma c_i\frac{\partial r}{\partial m_i} - \Sigma\bar{v}_i x_i \Sigma c_k\frac{\partial r}{\partial v_k} - \bar{a}\Sigma c_i\frac{\partial r}{\partial a_i} - \bar{b}\Sigma c_i\frac{\partial r}{\partial b_i}\right.$$

offenbar identisch verschwindet, so kann man statt der obigen Gleichung auch die folgende setzen:

$$(16.) \qquad 0 = 2\overline{c}r^2 + M\overline{m} + r\left\{c\Sigma\overline{v}_i\frac{\partial r}{\partial v_i} - \Sigma\overline{v}_i x_i \Sigma c_k \frac{\partial r}{\partial v_k}\right\};$$

der Ausdruck der Function M ist dabei gleichgültig.

Nun findet sich durch Auflösung der Gleichungen

$$m = 0, \qquad v = v, \qquad a = 0, \qquad b = 0$$

für x_i der Werth:

$$r x_i = v\frac{\partial r}{\partial v_i}.$$

Daher ist auch:

$$r\left\{c\Sigma\overline{v}_i\frac{\partial r}{\partial v_i} - \Sigma\overline{v}_i x_i \Sigma c_k \frac{\partial r}{\partial v_k}\right\} = \Sigma\overline{v}_i\frac{\partial r}{\partial v_i}\left(rc - v\Sigma c_k\frac{\partial r}{\partial v_k}\right),$$

und dieser Ausdruck verschwindet, wie man sofort sieht, wenn man in dem verschwindenden Ausdrucke (15.) die x an Stelle der $\overline{x}$ setzt. Von der Gleichung (16.) bleiben also nur die in $\overline{c}$ und $\overline{m}$ multiplicirten Terme übrig; die fragliche Ebene geht also durch den Schnitt von $\overline{c} = 0$, $\overline{m} = 0$, d. h. durch die Verbindungslinie der in Rede stehenden drei Wendepunkte, was zu beweisen war.

Dieser Beweis wird auch, wie man leicht sieht, nicht aufgehoben, wenn diejenigen Ausnahmefälle eintreten, in denen die Schnittcurve nicht eine Gleichung von der Form

$$a^3 + b^3 + 6abc = 0$$

annehmen kann. Der erste dieser Ausnahmefälle tritt ein, wenn die Curve dritter Ordnung in einen Kegelschnitt und in eine Gerade zerfällt. In diesem Falle ist b^3 nicht mit dem Coefficienten 1, sondern mit dem Coefficienten 0 zu behaften, was nichts ändert. Zugleich schneiden, da die Gleichung des Kegelschnittes dann $a^2 + 6bc = 0$ ist, b und c in den Tangenten des Kegelschnittes für die Puncte, in denen er von der Geraden $a = 0$ geschnitten wird. Dies giebt folgenden besonderen Satz:

Legt man durch eine der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung eine Ebene, welche dann noch in einem Kegelschnitte schneidet; so stehen die beiden Schnittpuncte desselben mit der Geraden und die Tangenten des Kegelschnitts in diesen Puncten in solcher Wechselbeziehung, dass die in Bezug auf die Hessesche Fläche genommene Polare jedes Punctes der einen Tangente durch den anderen Schnittpunct hindurchgeht.

Der Fall, wo dieser Kegelschnitt sich in ein Linienpaar auflöst, entspricht dem Satze des vorigen Paragraphen. Die nach dem Wendepuncte gezogene Gerade wird dann unbestimmt, insofern jeder Punct der Schnittcurve als Wendepunct aufzufassen ist.

Der zweite Ausnahmefall tritt ein, wenn der Punct x der Wendecurve angehört, und die durch ihn gelegte Berührungsebene also in einer Curve mit Rückkehrpunct schneidet. An Stelle von a^3+b^3+6abc muss man dann a^3+3b^2c setzen, was gleichfalls im Resultate nichts ändert. Alle Wendepuncte liegen in diesem Falle auf $a=0$, in der Geraden, welche den Rückkehrpunct mit dem neunten Wendepuncte verbindet. Man hat also den besonderen Satz:

Legt man in einem Puncte der Wendecurve einer Fläche dritter Ordnung an diese eine Tangentenebene, so schneidet sie in einer Curve mit Rückkehrpunct, welche ausser diesem nur noch einen einzigen Wendepunct besitzt. Die auf der Verbindungslinie beider gelegenen Puncte haben die Eigenschaft, dass ihre in Bezug auf die Hessesche Fläche genommenen Polaren durch den Rückkehrpunct selbst gehen; oder mit anderen Worten, die Tangentenebene des Rückkehrpunctes für die Hessesche Fläche und seine Tangentenebene für $u=0$ müssen sich in dieser Geraden durchschneiden.

Die Anwendung dieser besonderen Sätze auf Flächen n^{ter} Ordnung liegt nach dem Früheren auf der Hand. Man hat nämlich nur statt der Schnittcurve der Tangentenebene $Du=0$ mit $u=0$ ihren Schnitt mit $D^3u=0$ zu setzen; ob man aber die *Hesse*sche Fläche für $u=0$ oder für $D^3u=0$ anwendet, bleibt im Resultate gleichgültig.

§. 3.

Mit Hülfe dieser Sätze ist es nun möglich, dem in §. 1 bestimmten Oberflächensysteme $(8n-14)^{ter}$ Ordnung eine unmittelbare geometrische Deutung abzugewinnen; oder wenigstens dasjenige Curvensystem geometrisch zu interpretiren, in welchem diese Flächen die Fläche $u=0$ schneiden.

Denken wir uns nämlich in jedem Puncte x der Fläche $u=0$ die entsprechende Fläche $D^3u=0$ construirt, deren Puncte die Eigenschaft besitzen, dass ihre dritte Polare durch x geht. Die Tangentenebene von x an $u=0$ fällt mit der an $D^3u=0$ gezogenen zusammen; und sie schneidet letztere Fläche in einer Curve mit Doppelpunct. Denken wir uns jetzt die noch übrigen Wendepuncte dieser Curve mit x verbunden; die Bedingung, dass

eine dieser Geraden eine bestimmt gegebene Gerade treffe, definirt den Punct x als der Curve angehörig, in welcher eine der Flächen $(8n-14)^{ter}$ Ordnung die Fläche $u=0$ schneidet.

Verbindet nämlich die gegebene Gerade die Puncte a, b, so muss unter diesen Umständen der Wendepunct y Coordinaten von der Form $\lambda a_i+\mu b_i+\varrho x_i$ haben, wobei $\lambda a_i+\mu b_i$ die Coordinaten des Punctes sind, in welchem die von x nach dem Wendepuncte gezogene Gerade die Linie ab schneidet. Der Wendepunct soll gleichzeitig auf $D\Delta=0$, auf $Du=0$ und auf $D^3u=0$ liegen. Bezeichnet man nun genauer die Grössen, welche bei der Bildung der Differentialoperationen Du etc. als Incremente eingeführt werden, durch beigefügte Indices, so hat man unter diesen Umständen:

$$\begin{aligned} D_y(\Delta) &= D_{\lambda a+\mu b}(\Delta)+\varrho\Delta = 0, \\ D_y(u) &= D_{\lambda a+\mu b}(u) = 0, \\ D^3_{y^3}(u) &= D^3_{(\lambda a+\mu b)^3}(u)+3\varrho D^2_{(\lambda a+\mu b)^2}(u) = 0; \end{aligned}$$

oder, nach Elimination von ϱ,

$$(16^{a}.)\qquad \begin{cases} D_{\lambda a+\mu b}(u) = 0, \\ \Delta D^3_{(\lambda a+\mu b)^3}(u)-3D_{(\lambda a+\mu b)}(\Delta).D^2_{(\lambda a+\mu b)^2}(u) = 0. \end{cases}$$

Hier bestimmen sich aus der ersten Gleichung λ, μ ganz wie in §. 1, und, indem man ihre Werthe in die zweite Gleichung $(16^{a}.)$ einführt, gelangt man genau zu derselben Fläche $(8n-14)^{ter}$ Ordnung, welche oben benutzt wurde.

Dass, wie in §. 1 gezeigt wurde, alle Flächen dieser Art durch die Doppelpuncte der Curve vierpunctiger Berührung gehen müssen, ergiebt sich sofort von selbst aus der geometrischen Definition dieser Flächen. Die Ebene $Du=0$ schneidet sich mit der Fläche $D^3u=0$ für solche Puncte in einer Curve, welche in drei Gerade zerfällt. Der Schnittpunct zweier derselben ist der Doppelpunct selbst. Jede von diesem nach der dritten gezogene Gerade ist als nach einem Wendepuncte gezogen zu betrachten. Unter diesen aber muss sich immer eine befinden, welche zugleich die gegebene Gerade a, b trifft. Der Doppelpunct genügt also, wie auch diese Gerade gegeben sein mag, der Bedingung, nach welcher er der entsprechenden Curve $(8n-14)^{ter}$ Ordnung angehört.

Die Doppelpuncte liegen auf der Curve der vierpunctigen Berührung, welche der Schnitt von $u=0$ mit der Fläche $(11n-24)^{ster}$ Ordnung $F=0$ ist. Das ganze System der oben erwähnten Curven hat also mit dieser Curve eine Anzahl gemeinsamer Schnittpuncte. Ich will die Zahl der Doppelpuncte, welche

wir suchen, durch α bezeichnen; da von der Curve der vierpunctigen Berührung immer *zwei* Zweige durch einen solchen Punct gehen, so entsprechen die α Doppelpuncte 2α Schnittpuncten der Flächen $u=0$, $F=0$ mit irgend einer der Flächen $8n-14^{\text{ten}}$ Grades. Bezeichnet man durch β die Zahl der übrigen Schnittpuncte, so hat man also die Gleichung:

$$(17.) \qquad 2\alpha+\beta = n.8n-14.11n-24.$$

Das Bedenken, ob nicht vielleicht die Doppelpuncte auch für diejenige Curve Doppelpuncte seien, in welchen $u=0$ von der betreffenden Fläche $(8n-14)^{\text{ter}}$ Ordnung geschnitten wird, erledigt sich am besten, wenn man die Doppelpuncte dieser Curve unmittelbar aufsucht. Solche Doppelpuncte können der geometrischen Erzeugung der Curve nach nur entstehen, wenn von einem Puncte der Fläche mehrere verschiedene oder zusammenfallende Gerade nach der Geraden ab gezogen werden können, welche durch Wendepuncte des Schnittes von $Du=0$, $D^3u=0$ hindurchgehen.

Dies ist erstlich immer möglich, wenn der Punct der Fläche auf der Geraden ab selbst liegt, also in den Schnittpuncten dieser Geraden mit $u=0$. Zweitens können verschiedene Gerade durch Wendepuncte gezogen werden, wenn ab in der Tangentenebene von x liegt. Drittens können hierher die Fälle gehören, wo mehr als ein Wendepunct des Schnittes von $Du=0$, $D^3u=0$ mit x in einer Geraden liegt. In diesem Falle ist entweder x ein Rückkehrpunct, und liegt also auf $\Delta=0$, oder es zerfällt die Curve dritter Ordnung in eine Gerade und einen Kegelschnitt, und es wird also die Gerade ab von einer vierpunctig berührenden Tangente geschnitten.

Die Doppelpuncte der Curve vierpunctiger Berührung gehören keiner dieser Abtheilungen an. Sie sind also als einfache Puncte der Fläche $(8n-14)^{\text{ter}}$ Ordnung anzusehen.

Die anderen Schnittpuncte dieser Fläche mit der Curve der vierpunctigen Berührung sind nun dadurch bestimmt, dass für sie eine nach einem der entsprechenden Wendepuncte gezogene Gerade durch die Gerade ab geht, und dass gleichzeitig in jenem Puncte eine Gerade vierpunctig berührt. Diese Gerade muss deswegen der entsprechenden Curve dritter Ordnung ganz angehören; diese zerfällt also in diese Gerade und einen Kegelschnitt, und da alle Wendepuncte einer solchen Curve auf der Geraden liegen, so muss diese selbst es sein, welche die Gerade ab schneidet. Die Auffindung dieser Schnittpuncte kommt also mit dem Problem überein, *die vierpunctig berührenden Geraden zu finden, welche eine gegebene Gerade schneiden.*

Bei Flächen dritter Ordnung sind solche Gerade nicht möglich; es ist also $\beta = 0$, und

$$\alpha = \frac{3.10.9}{2} = 135,$$

welches das bekannte Resultat ist.

Aber im Allgemeinen existiren solche Gerade allerdings. Und zwar gehören die Berührungspuncte nach dem Vorigen möglicher Weise unter die vielfachen Puncte der Curve $n(8n-14)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dass dies in der That nicht der Fall ist, kann man etwa so einsehen.

Wenn man λ und μ aus $(16^{\alpha}.)$ eliminirt, so erhält man die Gleichung der Fläche $(8n-14)^{\text{ter}}$ Ordnung in folgender Gestalt, in welcher der Kürze wegen $D_a^3 u$, $D_a u$ durch u_{aaa}, u_a etc. ersetzt ist:

$$\Delta(u_{aaa}u_b^3 - 3u_{aab}u_b^2 u_a + 3u_{abb}u_b u_a^2 - 2u_{bbb}u_a^3)$$
$$-3(\Delta_a u_b - \Delta_b u_a)(u_{aa}u_b^2 - 2u_{ab}u_b u_a + u_{bb}u_a^2) = 0.$$

Nehmen wir nun an, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen kann, der Schnittpunct der vierpunctig berührenden Geraden mit der Geraden ab sei der Punkt a selbst. Dann ist:

$$u_a = 0, \quad u_{aa} = 0, \quad u_{aaa} = 0.$$

Die Tangentenebene der vorliegenden Fläche hat also für den Berührungspunct x die Gleichung:

$$0 = \Delta\{(n-3)Du_{aaa}u_b - 3(n-1)u_{aab}Du_a\} - 3\Delta_a\{(n-2)u_b Du_{aa} - 2(n-1)u_{ab}Du_a\}.$$

Diese Gleichung ist weder unbestimmt, noch fällt sie in der Nähe von x mit dem Elemente der Curve vierpunctiger Berührung zusammen. Das erste sieht man, wenn man sich etwa den Punct x als eine Ecke des Coordinatentetraeders denkt, und sodann u nach Potenzen der entsprechenden Coordinate ordnet. Man sieht dann sofort, dass, abgesehen von allem anderen, in Du_{aaa} Terme bleiben, welche in keinem anderen Gliede der Gleichung vorkommen, und also nicht fortfallen können. Das zweite ist von vorn herein klar; denn die betrachtete vierpunctig berührende Gerade kann, bei beliebiger Wahl der Geraden ab, jede vierpunctig berührende Gerade werden. Diesen aber kommt keinesweges die Eigenschaft zu, Tangenten an die Curve vierpunctiger Berührung zu sein, was vielmehr nur für die Puncte fünfpunctiger Berührung eintritt.

Es ist also β die Zahl der vierpunctig berührenden Geraden selbst, welche durch eine gegebene Gerade ab hindurchgehen. Diese Zahl soll jetzt bestimmt werden.

§. 4.

Sei $\lambda a+\mu b$ der Schnittpunct einer in x vierpunctig berührenden Geraden mit der Geraden ab. Man hat dann als Bedingungen der vierpunctigen Berührung die Gleichungen:

$$(18.)\qquad \begin{cases} u = 0, \\ D_{\lambda a+\mu b}(u) = 0, \\ D^2_{(\lambda a+\mu b)^2}(u) = 0, \\ D^3_{(\lambda a+\mu b)^3}(u) = 0. \end{cases}$$

Dieselben sind für die x von den Graden n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, für das Verhältniss $\frac{\lambda}{\mu}$ von den Graden 0, 1, 2, 3. Die Elimination der x führt also auf eine algebraische Gleichung für dieses Verhältniss, deren Grad folgender ist:

$$n\{1.n-2.n-3+2.n-3.n-1+3.n-1.n-2\} = n(6n^2-22n+18).$$

Aber dennoch zeigt diese Zahl nicht die Anzahl der gesuchten vierpunctig berührenden Geraden an. Denn in der That führen die Gleichungen (18.) auf Tangenten dieser Art nur, wenn man die Puncte x und $\lambda a+\mu b$ als von einander verschieden voraussetzt. Nun genügen allen Gleichungen (18.) auch die Schnittpuncte der Geraden ab mit $u=0$, für welche diese Puncte zusammenfallen. Es bleibt also zu untersuchen, wie viele Lösungen jener Gleichungen durch diese Puncte absorbirt werden.

Lassen wir den Punct a selbst einen dieser Schnittpuncte bedeuten. In der Nähe dieses Punctes, für welchen demnach u verschwindet, sei $x_i=a_i+\varepsilon y_i$ und zugleich $\mu=\varepsilon\varrho$, wo ε eine sehr kleine Grösse bedeutet. Die Grössen λ können wir, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, gleich 1 setzen. Denken wir uns nun diese Werthe in die Gleichungen (18.) eingeführt und nach Potenzen von ε entwickelt, so erhalten wir folgendes System, in dessen linken Theilen immer a statt x geschrieben gedacht wird:

$$u+\quad n\varepsilon D_y(u)\quad +\frac{n.n-1}{1.2}\varepsilon^2 D^2_{y^2}(u)+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\varepsilon^3 D^3_{y^3}(u)+\cdots = 0.$$

$$u+(n-1)\varepsilon D_y(u)+\frac{n-1.n-2}{1.2}\varepsilon^2 D^2_{y^2}(u)+\frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3}\varepsilon^3 D^3_{y^3}(u)+\cdots$$
$$+\varepsilon\varrho\,(D_b(u)+\cdots) = 0.$$

$$u+(n-2)\varepsilon D_y(u)+\frac{n-2.n-3}{1.2}\varepsilon^2 D^2_{y^2}(u)+\frac{n-2.n-3.n-4}{1.2.3}\varepsilon^3 D^3_{y^3}(u)+\cdots$$
$$+2\varepsilon\varrho\,(D_b(u)+\cdots) = 0.$$

$$u+(n-3)\varepsilon D_y(u)+\frac{n-3.n-4}{1.2}\varepsilon^2 D^2_{y^2}(u)+\frac{n-3.n-4.n-5}{1.2.3}\varepsilon^3 D^3_{y^3}(u)+\cdots$$
$$+3\varepsilon\varrho\,(D_b(u)+\cdots) = 0.$$

Da nun $u = 0$, so kann man durch Auflösung dem Systeme die Form geben:

$$D_y(u) = \varrho . P, \quad \varepsilon D^2_{y2}(u) = \varrho . Q, \quad \varepsilon^2 D^3_{y3}(u) = \varrho . R, \quad \varepsilon^3 D^4_{y4}(u) = \varrho . S,$$

wo P, Q, R, S in Bezug auf ε von der nullten Ordnung sind. Der letzten Gleichung wegen muss ϱ selbst von der Ordnung ε^3 sein, oder man darf an Stelle dieser Gleichungen, für ein verschwindendes ε, die folgenden setzen:

$$D_y(u) = 0, \qquad D^2_{y2}(u) = 0, \qquad D^3_{y3}(u) = 0.$$

Man hat hier die drei letzten Polaren des Punctes a vor sich, welche sich bekanntlich in sechs mit a zusammenfallenden Puncten schneiden. Jede der auszuscheidenden Lösung ist also sechsfach zu zählen, so dass man zu folgendem Satze gelangt:

Durch eine gegebene Gerade kann man im Allgemeinen $2n(3n-2)(n-3)$ *Gerade legen, welche eine gegebene Fläche* n^{ter} *Ordnung vierpunctig berühren.*

Wenden wir dies auf das Problem der fraglichen Doppelpuncte an, so ist in (17.) $\beta = 2n(3n-2)(n-3)$ zu setzen, oder man hat den Satz:

Die Curve der vierpunctigen Berührungen auf einer Fläche n^{ter} *Ordnung hat im Allgemeinen*

$$n\{(4n-7)(11n-24)-(3n-2)(n-3)\} = n\cdot\{11n^2-162n+162\}$$

Doppelpuncte.

Giessen, den 26sten Mai 1863.

Note über die Integration einer gewissen Gattung linearer Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Simon Spitzer* zu Wien.)

Kummer hat im 19ten Bande dieses Journals gezeigt, dass, wenn die Gleichung

$$\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} = x^{m-1} z$$

das Integral $z = \psi(x)$ hat, sodann das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = x^m y$$

die Gestalt annimmt:

$$y = \int_0^x u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)\, \partial u,$$

wenn zwischen den $n+1$ Constanten, die in $\psi(x)$ vorhanden sind, eine gewisse Bedingungsgleichung Statt hat.

Dieser Satz von *Kummer* ist ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes, welcher folgendermassen lautet:

Ist das Integral der linearen Differentialgleichung

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\left[A_k x^k \frac{\partial^k z}{\partial x^k} + A_{k-1} x^{k-1} \frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^{k-1}} + \cdots + A_1 x \frac{\partial z}{\partial x} + A_0 z\right] \\ \qquad = x^{m-1}\left[B_r x^r \frac{\partial^r z}{\partial x^r} + B_{r-1} x^{r-1} \frac{\partial^{r-1} z}{\partial x^{r-1}} + \cdots + B_1 x \frac{\partial z}{\partial x} + B_0 z\right], \end{cases}$$

in welcher m und

$$A_k,\ A_{k-1},\ \ldots,\ A_1,\ A_0,\quad B_r,\ B_{r-1},\ \ldots,\ B_1,\ B_0$$

constante Zahlen, r, k und n ganze positive Zahlen oder auch Null bedeuten, bekannt, ist nämlich

$$(2.)\qquad z = \psi(x),$$

so ist das Integral der linearen Differentialgleichung

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[A_k x^k \frac{\partial^k y}{\partial x^k} + A_{k-1} x^{k-1} \frac{\partial^{k-1} y}{\partial x^{k-1}} + \cdots + A_1 x \frac{\partial y}{\partial x} + A_0 y\right] \\ \qquad = x^m\left[B_r x^r \frac{\partial^r y}{dx^r} + B_{r-1} x^{r-1} \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}} + \cdots + B_1 x \frac{\partial y}{\partial x} + B_0 y\right] \end{cases}$$

von folgender Form:

$$(4.)\qquad y = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)\, \partial u.$$

Der Beweis dieses Satzes ist höchst einfach und ganz dem ähnlich, den *Kummer* bei seinem Theoreme einschlug. Differentiirt man nämlich die Gleichung (3.) und setzt man der Kürze halber

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\left[A_k x^k \dfrac{\partial^k y}{\partial x^k} + A_{k-1} x^{k-1} \dfrac{\partial^{k-1} y}{\partial x^{k-1}} + \cdots + A_1 x \dfrac{\partial y}{\partial x} + A_0 y\right] \\ \qquad = C_k x^k \dfrac{\partial^{n+k+1} y}{\partial x^{n+k+1}} + C_{k-1} x^{k-1} \dfrac{\partial^{n+k} y}{\partial x^{n+k}} + \cdots + C_1 x \dfrac{\partial^{n+2} y}{\partial x^{n+2}} + C_0 \dfrac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}, \end{cases}$$

woselbst

$$C_k,\quad C_{k-1},\quad \ldots,\quad C_1,\quad C_0$$

ebenfalls constante Zahlen bedeuten, so erhält man:

$$(6.)\quad \begin{cases} C_k x^k \dfrac{\partial^{n+k+1} y}{\partial x^{n+k+1}} + C_{k-1} x^{k-1} \dfrac{\partial^{n+k} y}{\partial x^{n+k}} + \cdots + C_1 x \dfrac{\partial^{n+2} y}{\partial x^{n+2}} + C_0 \dfrac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}} \\ \qquad = x^{m-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} \left[B_\lambda x^{\lambda+1} \dfrac{\partial^{\lambda+1} y}{\partial x^{\lambda+1}} + (m+\lambda) B_\lambda x^\lambda \dfrac{\partial^\lambda y}{\partial x^\lambda}\right]. \end{cases}$$

Führt man hierin statt y seinen in (4.) stehenden Werth ein, so gelangt man zu folgender Gleichung:

$$(7.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty u^{m+n} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} [C_k x^k u^k \psi^{(n+k+1)}(ux) + C_{k-1} x^{k-1} u^{k-1} \psi^{(n+k)}(ux) + \cdots \\ \qquad + C_1 x u \psi^{(n+2)}(ux) + C_0 \psi^{(n+1)}(ux)]\, du \\ = x^{m-1} \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} \Big[B_\lambda x^{\lambda+1} \int_0^\infty u^{m+\lambda} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(\lambda+1)}(ux)\, du \\ \qquad + (m+\lambda) B_\lambda x^\lambda \displaystyle\int_0^\infty u^{m+\lambda-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(\lambda)}(ux)\, du\Big], \end{cases}$$

und diese gestattet eine wesentliche Vereinfachung. Es ist nämlich, vermöge der Gleichung (1.) identisch:

$$C_k x^k \psi^{(n+k+1)}(x) + C_{k-1} x^{k-1} \psi^{(n+k)}(x) + \cdots + C_1 x \psi^{(n+2)}(x) + C_0 \psi^{(n+1)}(x)$$
$$= x^{m-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} [B_\lambda x^\lambda \psi^{(\lambda)}(x)],$$

und diese bleibt identisch, wenn man ux statt x setzt; folglich ist:

$$C_k x^k u^k \psi^{(n+k+1)}(ux) + C_{k-1} x^{k-1} u^{k-1} \psi^{(n+k)}(ux) + \cdots + C_1 x u \psi^{(n+2)}(ux) + C_0 \psi^{(n+1)}(ux)$$
$$= u^{m-1} x^{m-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} [B_\lambda u^\lambda x^\lambda \psi^{(\lambda)}(ux)].$$

Mittelst dieser Gleichung vereinfacht sich die Gleichung (7.) und geht, wenn man gleich durch x^{m-1} dividirt, über in

$$(8.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} u^{2m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} [B_\lambda u^\lambda x^\lambda \psi^{(\lambda)}(ux)]\, du \\ = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} [B_\lambda x^{\lambda+1} u^{m+\lambda} \psi^{(\lambda+1)}(ux) + (m+\lambda) B_\lambda x^\lambda u^{m+\lambda-1} \psi^{(\lambda)}(ux)]\, du, \end{cases}$$

und dies ist identisch. Denn differentiirt man den Ausdruck

$$(9.)\quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} \left[B_\lambda x^\lambda u^{m+\lambda} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(\lambda)}(ux)\right]$$

nach u, so erhält man:

$$(10.)\quad \begin{cases} d\sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} \left[B_\lambda x^\lambda u^{m+\lambda} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(\lambda)}(ux)\right] = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} \Big[(m+\lambda) B_\lambda x^\lambda u^{m+\lambda-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(\lambda)}(ux) \\ \qquad - B_\lambda x^\lambda u^{2m+n+\lambda-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(\lambda)}(ux) + B_\lambda x^{\lambda+1} u^{m+\lambda} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(\lambda+1)}(ux)\Big]\, du, \end{cases}$$

und wird dies bezüglich u innerhalb der Grenzen 0 und ∞ integrirt, so erhält man die Gleichung (8.), vorausgesetzt, dass der Ausdruck (9.), d. i.

$$(11.)\quad u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} [B_0\psi(ux) + B_1 ux\,\psi'(ux) + \cdots + B_{r-1} u^{r-1} x^{r-1} \psi^{(r-1)}(ux) + B_r u^r x^r \psi^{(r)}(ux)],$$

sowohl für $u = 0$ als auch für $u = \infty$ verschwindet.

Man kann den in dieser Note bewiesenen Satz nach einer, bei ähnlicher Gelegenheit von *Dienger* *) gemachten Bemerkung, genauer folgendermassen aussprechen:

Ist das Integral der Gleichung (1.)

$$z = \psi(x),$$

so genügt der in (4.) aufgestellte Werth von y derjenigen Differentialgleichung, welche man erhält, wenn man die Gleichung (3.) einmal differentiirt; nur ist nöthig, dass der Werth von y einen Sinn hat, und dass, sowohl für $u = 0$ als auch für $u = \infty$ der in (11.) stehende Ausdruck verschwindet.

Wien, im Juni 1863.

---

*) Heidelberger Jahrbücher der Literatur vom Jahre 1861, Seite 69.

Extrait d'une lettre de M. *Hermite* á M. *Brioschi.*

En appelant comme vous le faites *), U la forme cubique proposée, H le Hessien, K le covariant du sixième degré, et:

$$\Theta = \begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} & \frac{dU}{dz} \\ \frac{dH}{dx} & \frac{dH}{dy} & \frac{dH}{dz} \\ \frac{dK}{dx} & \frac{dK}{dy} & \frac{dK}{dz} \end{vmatrix}$$

le covariant du neuvième degré que vous avez à bien juste titre introduit dans la théorie, j'ai remarqué qu'il est décomposable en facteurs linéaires et que tous ses invariants sont des puissances du discriminant de U. On le prouve au moyen de l'expression correspondante à la forme canonique $U = x^3+y^3+z^3+6lxyz$, qui est:

$$\Theta = R(x^3-y^3)(y^3-z^3)(z^3-x^3)$$

abstraction faite d'un facteur numérique, R étant le discriminant.

D'une manière analogue, en ajoutant aux trois contravariants que M. *Cayley* désigne ainsi: PU, QU, FU le contravariant du neuvième degré:

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{dPU}{d\xi} & \frac{dPU}{d\eta} & \frac{dPU}{d\zeta} \\ \frac{dQU}{d\xi} & \frac{dQU}{d\eta} & \frac{dQU}{d\zeta} \\ \frac{dFU}{d\xi} & \frac{dFU}{d\eta} & \frac{dFU}{d\zeta} \end{vmatrix}$$

on parviendra si l'on supprime un facteur numérique à:

$$\Omega = R(\xi^3-\eta^3)(\eta^3-\zeta^3)(\zeta^3-\xi^3),$$

d'où résultent les mêmes conséquences que pour Θ.

Mais la valeur de Ω sous forme de déterminant suggère naturellement d'appliquer votre méthode à la relation $PU=0$ en multipliant par:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{vmatrix}$$

*) C. R. de l'académie de Paris 1863 premier semestre, page 304.

ce qui donne:

$$\Omega\Delta = 3(QUdFU-2FUdQU)\Big(\alpha\frac{dPU}{d\xi}+\beta\frac{dPU}{d\eta}+\gamma\frac{dPU}{d\zeta}\Big)$$

sous la condition admise $PU=0$.

Effectivement il est aisé d'obtenir:

$$\Omega^2 = FU(QU)^4-2T(FU.QU)^2+R(FU)^3,$$

T étant l'invariant du dixième ordre et R le discriminant. Faisant donc:

$$z = \frac{QU}{\sqrt{FU}},$$

on aura:

$$\Omega\Delta = -6\,dz(FU)^{\frac{3}{2}}\Big(\alpha\frac{dPU}{d\xi}+\beta\frac{dPU}{d\eta}+\gamma\frac{dPU}{d\zeta}\Big),$$

$$\Omega = (FU)^{\frac{3}{2}}\sqrt{z^4-2Tz^2+R},$$

et par suite:

$$\frac{\Delta}{\alpha\frac{dPU}{d\xi}+\beta\frac{dPU}{d\eta}+\gamma\frac{dPU}{d\zeta}} = -6\frac{dz}{\sqrt{z^4-2Tz^2+R}}.$$

Mais le point le plus essentiel est d'obtenir l'expression de Ω^2 en fonction rationnelle et entière des covariants et contravariants, ainsi que vous l'avez fait à l'égard de Θ^2 et des trois covariants. Votre méthode qui employe les quantités S_{ab}, T_{ab} de M. *Aronhold* m'ayant entièrement échappé, voici celle que j'ai suivie. J'ai pris pour point de départ, les expressions canoniques données par M. *Cayley:*

$$\begin{aligned}
PU &= -l(\xi^3+\eta^3+\zeta^3)+(4l^3-1)\xi\eta\zeta = 0,\\
QU &= (1-10l^3)(\xi^3+\eta^3+\zeta^3)-6l^2(5+4l^3)\xi\eta\zeta,\\
FU &= -4(1+8l^3)(\eta^3\zeta^3+\zeta^3\xi^3+\xi^3\eta^3)\\
&\quad +(\xi^3+\eta^3+\zeta^3)^2\\
&\quad -24l^2(\xi^3+\eta^3+\zeta^3)\xi\eta\zeta\\
&\quad -24l(1+2l^3)\xi^2\eta^2\zeta^2,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en faisant: $\omega = 1+8l^3$,

$$\xi^3+\eta^3+\zeta^3 = \frac{1-4l^3}{\omega^2}QU,$$

$$\eta^3\zeta^3+\zeta^3\xi^3+\xi^3\eta^3 = -\frac{1}{4\omega^2}FU+\frac{1-16l^3}{4\omega^4}(QU)^2,$$

$$\xi^3\eta^3\zeta^3 = -\frac{l^3}{\omega^6}(QU)^3,$$

de sorte que le résultat cherché s'obtiendra en calculant le discriminant de l'équation du troisième dégré:

$$t^3-t^2\frac{1-4l^3}{\omega^2}QU+t\Big(-\frac{1}{4\omega^2}FU+\frac{1-16l^3}{4\omega^4}(QU)^2\Big)+\frac{l^3}{\omega^6}(QU)^3=0.$$

Ou en faisant:

$$2t-\frac{QU}{\omega^2}=\theta,$$

on a la transformée plus simple:

$$\theta^3+\theta^2\frac{QU}{\omega}-\theta\frac{FU}{\omega}-\frac{FU.QU}{\omega^3}=0,$$

et on en déduit abstraction faite d'un facteur numérique:

$$(\xi^3-\eta^3)^2(\eta^3-\zeta^3)^2(\zeta^3-\xi^3)^2=\frac{1}{\omega^6}\{FU(QU)^4-2(1-20l^3-8l^6)(FU.QU)^2+\omega^3(FU)^3\},$$

et par suite le résultat ci-dessus.

Peut-être ne serait-il pas sans intérêt de rapprocher la substitution précédente de la votre appropriée à l'équation $PU=0$, et aussi d'envisager à la place des équations $U=0$ et $PU=0$, celles-ci:

$$aU+bHU=0,\quad aPU+bQU=0.$$

Paris, 21 Février 1863.

Note de M. *Brioschi* relative à la lettre précédente.

En supposant que les expressions des contravariants P, Q, F soient celles des formes adjointes (zugehörigen) désignées S_f, T_f, $F(u_1, u_2, u_3)$ par M. *Aronhold* (pag. 139, 185 de son mémoire sur la théorie des fonctions homogènes du troisième degré à trois indéterminées, Vol. 55 de ce Journal) la valeur de Ω^2 en fonction de P, Q, F et des invariants s, t est la suivante*):

$$\Omega^2=8(s^3-t^2)F^3+8(stP^2-2s^2PQ+tQ^2)F^2$$
$$+\tfrac{2}{3}(s^2P^4-8tP^3Q+10sP^2Q^2-3Q^4)F+\tfrac{8}{2\,7}P^3(2tP^3-3sP^2Q+Q^3).$$

En désignant par $h(P)$, $k(P)$ les covariants pour la forme cubique P, et par σ, τ ses invariants, on a:

$$\sigma=4(t^2+3s^3),\qquad \tau=8t(9s^3-t^2),$$
$$h(P)=6sQ-2tP,\qquad 6k(P)-2\tau P^2=144s^2(3rF+stP^2-2s^2PQ+tQ^2)$$

---

*) La notation que j'emploie (celle de M. *Aronhold*) diffère par des facteurs numériques de la notation employée par M. *Hermite* (celle de M. *Cayley*), de telle sorte que les quantités que je désigne par P, Q, F, t, r, Ω sont équivalentes à celles que M. *Hermite* désigne par $6P$, $-2Q$, $-2F$, $-T$, $-R$, 8Ω.

où $r = t^2 - s^3$ est le discriminant de la forme u; par conséquent si l'on suppose $P = 0$ on aura:

$$\frac{6k(P)}{h^2(P)} = 4\left(3r\frac{F}{Q^2} + t\right),$$

ou en posant:

$$z = \frac{6k(P)}{h^2(P)}, \qquad y = \frac{Q}{\sqrt{2F}}$$

on aura le résultat que la substitution $y^2 = \frac{6r}{z - 4t}$ conduit à la transformation suivante d'intégrales elliptiques:

$$\tfrac{1}{3}\frac{dy}{\sqrt{(r + 2ty^2 - y^4)}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z^3 - 3\sigma z + 2\tau)}}.$$

J'ajouterai enfin les valeurs des covariants H, K, Θ correspondants à la forme cubique $U = au + bh$. On a, comme il est connu, $H = \alpha u + \beta h$ et en désignant avec M. *Aronhold* par S_{ab}, T_{ab} les invariants de la forme U, on trouve:

$$6K - 2T_{ab}U^2 = (a\beta - b\alpha)^2(6k - 2tu^2), \qquad \Theta = (a\beta - b\alpha)^3\theta.$$

Nouvelles recherches sur l'élimination et la théorie des courbes.

(Par M. *A. Cayley* à Cambridge.)

Dans le problème de l'élimination, on cherche la relation qui doit exister entre les coefficients d'une fonction ou système de fonctions, pour que quelque circonstance particulière, ou singularité puisse avoir lieu, par exemple, pour que deux équations puissent avoir une racine commune, ou (comme application géometrique) pour qu'une courbe puisse avoir un point double. En prenant les coefficients comme donnés, tant la relation cherchée que la singularité qu'elle implique n'ont qu'une existence *hypothétique*. Mais on peut transformer la question en supposant que les coefficients d'une ou de plusieurs des fonctions soient de la forme $a=\lambda a'+\mu a''$, $b=\lambda b'+\mu b''$, ... où a', b', ..., a'', b'', ... sont des coefficients donnés, mais λ, μ des quantités arbitraires. On peut alors disposer en sorte que la singularité dont il s'agit existe actuellement, en déterminant, au moyen de la relation donnée par l'élimination, la valeur du rapport $\lambda : \mu$. Ces substitutions $a=\lambda a'+\mu a''$, $b=\lambda b'+\mu b''$, ... changent la fonction U à laquelle se rapportent les coefficients a, b, ... en $U=\lambda U'+\mu U''$, où U', U'' sont des fonctions semblables à U, mais avec les coefficients a', b', ... ou a'', b'', ... au lieu de a, b ...: en se servant d'une expression usitée, on peut dire que la fonction U est en involution avec U', U''; et de même en géométrie que la courbe $U=0$ est en involution avec les courbes $U'=0$, $U''=0$; au reste pour les courbes cela veut dire que les trois courbes se coupent dans les mêmes points.

On conçoit comment cette manière d'envisager le problème peut conduire à une interprétation géometrique de résultats qui n'avaient auparavant qu'une signification analytique. Considérons par exemple la proposition suivante „le discriminant d'une fonction quadratique à trois variables est du degré 3 par rapport aux coefficients", ou ce qui est la même chose, „la fonction qui égalée à zéro exprime que la conique $U=0$ ait un point double (se réduise à une paire de droites) est du degré 3 par rapport aux coefficients." c'est là une proposition purement analytique, mais si comme ci-dessus on met $\lambda a'+\mu a''$, $\lambda b'+\mu b''$, ... au lieu de a, b, ... on a le théorème géometrique

que voici: „Dans le système de coniques $\lambda U' + \mu U'' = 0$ en involution avec les coniques données $U' = 0$, $U'' = 0$, il y a 3 coniques à point double (c'est à dire, trois paires de droites)". En considérant le cas plus général d'une fonction à trois variables et d'ordre quelconque, la question analytique „quel est le degré du discriminant de la fonction U" peut être remplacée par la question géometrique „dans le système des courbes $\lambda U' + \mu U'' = 0$ en involution avec les deux courbes données $U' = 0$, $U'' = 0$, quel est le nombre des courbes à point double" ou, ce qui est la même chose, „quel est le nombre des points dont chacun est le point double d'une courbe du système." En considérant la question sous cette dernière forme, non seulement on retrouve la valeur connue $3(n-1)^2$ du degré du discriminant de la fonction $U = (A, \ldots)\widehat{(x, y, z)^n}$, mais on trouve aussi le théorème plus général:

La fonction $U = (A, \ldots)\widehat{(x, y, z)^n}$ étant telle que la courbe $U = 0$ ait un nombre α de points doubles et un nombre β de points de rebroussement, son discriminant spécial est du degré $3(n-1)^2 - 7\alpha - 11\beta$.

Sous la désignation de „discriminant special" j'entends la fonction laquelle égalée à zéro donne la condition pour que la courbe $U = 0$ ait un point double de plus. Il convient de remarquer par rapport à cette expression que le discriminant de la fonction générale du $n^{\text{ième}}$ ordre, en y substituant, au lieu des valeurs générales, les coefficients de la fonction U, dont il s'agit, ne donne nullement le discriminant special de U, mais se réduit identiquement à zéro; ce discriminant special est donc tout autre chose que le discriminant de la fonction générale. En partant tout simplement de *l'ordre* du discriminant special, j'ai voulu désigner l'ordre auquel cette expression s'élève par rapport à des coefficients absolument arbitraires ou éléments $a, b, \ldots$ lesquels sont censés entrer linéairement dans la fonction U. Il est donc nécessaire de démontrer d'abord la proposition auxiliaire que l'équation d'une courbe qui a déjà un nombre donné de points doubles et de rebroussement peut s'exprimer sous la forme signalée, c'est à dire linéairement par rapport à des coefficients absolument arbitraires ou éléments $a, b, \ldots$, proposition qui peut être démontrée sans difficulté.

Considérons en effet l'équation générale $U = (A, \ldots)\widehat{(x, y, z)^n} = 0$ où les coefficients $A, \ldots$ sont tous arbitraires: dans le cas d'un point double supposons que les coordonnées de ce point, dans le cas d'un point de rebroussement supposons que les coordonnées de ce point et la direction de la tangente soient données: cela établit pour chaque point double trois conditions.

et pour chaque point de rebroussement quatre conditions, qui contiennent d'une manière quelconque les paramètres appartenants au point double ou de rebroussement, mais qui sont linéaires par rapport aux coefficients $A, \ldots$; ces coefficients peuvent donc s'exprimer linéairement au moyen d'un nombre convenable de coefficients absolument arbitraires ou éléments $a, b, \ldots$ et c'est de ces éléments $a, b, \ldots$ qu'il s'agit et nullement des paramètres mentionnés ci-dessus qui entrent dans les expressions par lesquelles $A, \ldots$ sont donnés en termes de $a, \ldots$.

Cette proposition auxiliaire peut encore se démontrer de la manière que voici. Concevons que $P=0$ représente une courbe particulière quelconque du même ordre que $U=0$ et telle que pour chaque point double de la courbe $U=0$ elle ait un point double au même point, et que pour chaque point de rebroussement de la courbe $U=0$, elle ait un point de rebroussement au même point et avec la même tangente. Soient de même $Q=0$, $R=0$, ... des équations de courbes qui satisfont aux mêmes conditions. Cela posé, on peut évidemment écrire $U=aP+bQ+cR+\cdots$, c'est à dire que l'équation contiendra linéairement les coefficients absolument arbitraires ou éléments $a, b, \ldots$.

Je reviens au théorème dont je suis parti; soit d'abord $U=(a,\ldots\widehat{)}(x,y,z)^n=0$ une courbe sans points doubles ou de rebroussement, de sorte qu'il s'agisse du discriminant ordinaire. En écrivant pour plus de simplicité V, W au lieu de U', U'', on a à considérer la courbe $\lambda V+\mu W=0$ en involution avec les deux courbes $V=0$, $W=0$. Le degré du discriminant de U est égal au nombre des points dont chacun est le point double d'une courbe particulière du système $\lambda V+\mu W=0$. Or pour trouver ces points on n'a qu'à former les équations

$$\begin{aligned}\lambda\,\partial_x V+\mu\,\partial_x W &= 0,\\ \lambda\,\partial_y V+\mu\,\partial_y W &= 0,\\ \lambda\,\partial_z V+\mu\,\partial_z W &= 0,\end{aligned}$$

qui expriment que la courbe $\lambda V+\mu W=0$ a un point double, et d'éliminer entre ces équations les indéterminées λ, μ. Cela donne le système

$$\left\|\begin{matrix}\partial_x V, & \partial_y V, & \partial_z V\\ \partial_x W, & \partial_y W, & \partial_z W\end{matrix}\right\| = 0$$

qui comprend les deux équations

$$(1.)\quad \left|\begin{matrix}\partial_x V, & \partial_z V\\ \partial_x W, & \partial_z W\end{matrix}\right| = 0, \qquad (2.)\quad \left|\begin{matrix}\partial_y V, & \partial_z V\\ \partial_y W, & \partial_z W\end{matrix}\right| = 0$$

auxquelles on satisfait par $\partial_z V = 0$, $\partial_z W = 0$, et une troisième équation à laquelle on ne satisfait pas par ce dernier système. Or les courbes (1.) et (2.) se coupent en $4(n-1)^2$ points, mais parmi ceux-ci on a les $(n-1)^2$ points d'intersection des courbes $\partial_z V = 0$, $\partial_z W = 0$, et en écartant ces points on obtient $4(n-1)^2 - (n-1)^2 = 3(n-1)^2$ pour le nombre des points, ou ce qui est la même chose pour le degré du discriminant de U.

Je suppose à présent que la courbe $U = 0$ ait un point double; les courbes $V = 0$, $W = 0$ ont chacune un point double à ce même point, et en prenant ce point pour origine des coordonnées x, y les deux courbes seront

$$V = z^{n-2}(a, b, c)(x, y)^2 + \text{etc.} = 0,$$
$$W = z^{n-2}(a', b', c')(x, y)^2 + \text{etc.} = 0,$$

en dénotant par les etc. les termes des ordres plus élevés par rapport à x, y, ou moins elevés par rapport à z.

Cela donne pour la courbe (1.)

$$\begin{vmatrix} \partial_x V, & \partial_z V \\ \partial_x W, & \partial_z W \end{vmatrix} = 0 = z^{2n-5}\{(ax+by).(a', b', c')(x, y)^2 - (a'x+b'y).(a, b, c)(x, y)^2\} + \text{etc.}$$
$$= z^{2n-5} y \{(ax+by)(b'x+c'y) - (a'x+b'y)(bx+cy)\} + \text{etc.},$$

la courbe (1.) a donc à l'origine un point triple, les tangentes étant données par les équations

$$y = 0, \quad (ax+by)(b'x+c'y) - (a'x+b'y)(bx+cy) = 0,$$

et de même la courbe (2.) a à l'origine un point triple, les tangentes étant données par les équations

$$x = 0, \quad (ax+by)(b'x+c'y) - (a'x+b'y)(bx+cy) = 0;$$

il y a donc au point triple deux branches de la courbe (1.) dont chacune touche une de deux branches de la courbe (2.); ce qui donne à l'origine $4+4+3 = 11$ points d'intersection. De plus il est évident que les deux courbes $\partial_z V = 0$, $\partial_z W = 0$ ont chacune un point double à l'origine, c'est à dire elles s'y coupent en $2+2 = 4$ points.

Par conséquent les courbes (1.) et (2.) se coupent en $4(n-1)^2$ points, savoir

11 points à l'origine, $4(n-1)^2 - 11$ points autrepart,

les courbes $\partial_z V = 0$, $\partial_z W = 0$ se coupent en $(n-1)^2$ points, savoir

4 points à l'origine, $(n-1)^2 - 4$ points autrepart

et le système des $3(n-1)^2$ points contient

7 points à l'origine, $3(n-1)^2 - 7$ points autrepart.

En écartant les points à l'origine on a donc $3(n-1)^2-7$ points; pour une courbe à point double le degré du discriminant spécial est donc $=3(n-1)^2-7$. Si la courbe $U=0$ a un point de rebroussement, les courbes $V=0$, $W=0$ auront au même point un point de rebroussement avec la même tangente, et en prenant ce point pour origine des coordonnées et la droite $x=0$ pour l'équation de la tangente, les deux courbes seront

$$V = z^{n-2}.ax^2 + z^{n-3}.(\alpha, \beta, \gamma, \delta)(x, y)^3 + \text{etc.} = 0,$$
$$W = z^{n-2}.a'x^2 + z^{n-3}.(\alpha', \beta', \gamma', \delta')(x, y)^3 + \text{etc.} = 0.$$

Cela donne pour la courbe (1.)

$$0 = \begin{vmatrix} \partial_x V, & \partial_z V \\ \partial_x W, & \partial_z W \end{vmatrix}$$

$$= \{z^{n-2}.2ax + z^{n-3}.3(\alpha, \beta, \gamma)(x, y)^2 + \text{etc.}\}$$
$$\times \{\overline{n-2}\, z^{n-3}a'x^2 + \overline{n-3}\, z^{n-4}(\alpha', \beta', \gamma', \delta')(x, y)^3 + \text{etc.}\}$$
$$- \{z^{n-2}.2a'x + z^{n-3}.3(\alpha', \beta', \gamma')(x, y)^2 + \text{etc.}\}$$
$$\times \{\overline{n-2}\, z^{n-3}ax^2 + \overline{n-3}\, z^{n-4}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)(x, y)^3 + \text{etc.}\}$$
$$= z^{2n-6}\{2(n-3)[ax(\alpha', \beta', \gamma', \delta')(x, y)^3 - a'x(\alpha, \beta, \gamma, \delta)(x, y)^3]$$
$$-3(n-2)[ax^2(\alpha', \beta', \gamma')(x, y)^2 - a'x^2(\alpha, \beta, \gamma)(x, y)^2]\} + \text{etc.}$$
$$= z^{2n-6}\{-n(a\alpha' - a'\alpha)x^4 + \text{etc.}\, x^3y \ldots\} + \text{etc.}$$
$$= z^{2n-6}.x(-n\overline{a\alpha' - a'\alpha}, \ldots)(x, y)^3 + \text{etc.};$$

la courbe a donc à l'origine un point quadruple et la droite $x=0$ y est tangente de l'une de ses branches. On a de même pour la courbe (2.)

$$0 = \begin{vmatrix} \partial_y V, & \partial_z V \\ \partial_y W, & \partial_z W \end{vmatrix} = \{z^{n-3}.3(\beta, \gamma, \delta)(x, y)^2 + \text{etc.}\} \times \{\overline{n-2}\, z^{n-3}a'x^2 + \text{etc.}\}$$
$$- \{z^{n-3}.3(\beta', \gamma', \delta')(x, y)^2 + \text{etc.}\} \times \{\overline{n-2}\, z^{n-3}ax^2 + \text{etc.}\}$$
$$= z^{2n-6}x^2\{a'(\beta, \gamma, \delta)(x, y)^2 - a(\beta', \gamma', \delta')(x, y)^2\} + \text{etc.}$$
$$= z^{2n-6}x^2(\alpha'\beta - a\beta', \ldots)(x, y)^2;$$

cette courbe a donc à l'origine un point quadruple et la droite $x=0$ y est tangente commune de deux de ses branches. Cela donne à l'origine $5+4+4+4$, $=17$ points d'intersection des courbes (1.) et (2.). D'autre part on a

$$\partial_z V = \overline{n-2}\, z^{n-3}.ax^2 + \overline{n-3}\, z^{n-4}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)(x, y)^3 + \text{etc.} = 0,$$
$$\partial_z W = \overline{n-2}\, z^{n-3}.a'x^2 + \overline{n-3}\, z^{n-4}(\alpha', \beta', \gamma', \delta')(x, y)^3 + \text{etc.} = 0$$

et en combinant ces deux équations

$$z^{n-3}.ax^2+\text{etc.} = 0,$$
$$z^{n-4}(a\alpha'-a'\alpha, \ldots)(x, y)^3+\text{etc.} = 0.$$

De ces deux équations la première appartient à une courbe qui a un point de rebroussement à l'origine des coordonnées et la seconde à une courbe qui y a un point triple. Pour les deux courbes $\partial_z V=0$, $\partial_z W=0$ cela donne $3+3=6$ point d'intersection à l'origine.

Les courbes (1.) et (2.) se coupent donc en $4(n-1)^2$ points, savoir

17 points à l'origine, $4(n-1)^2-17$ points autrepart,

les courbes $\partial_z V=0$, $\partial_z W=0$ se coupent en $(n-1)^2$ points, savoir

6 points à l'origine, $(n-1)^2-6$ points autrepart

et le système des $3(n-1)^2$ points contient

11 points à l'origine, $3(n-1)^2-11$ points autrepart.

En écartant les points à l'origine, on obtient $3(n-1)^2-11$ points; pour une courbe avec un point de rebroussement, le degré du discriminant spécial est donc $=3(n-1)^2-11$.

Comme résultat final de cette recherche j'obtiens que la réduction du degré est de 7 unités pour un point double et de 11 unités pour un point de rebroussement; et de là, que pour un nombre α de points doubles et β de points de rebroussement, la reduction est de $7\alpha+11\beta$ unités; le degré du discriminant spécial sera donc dans ce cas $3(n-1)^2-7\alpha-11\beta$, ce qu'il s'agissait de démontrer.

Dans tout ce qui précède, j'ai supposé que le système soit tel que l'élimination conduise à une seule relation entre les coefficients; si au contraire l'élimination conduit a deux relations, il faut écrire au lieu de a, b, ... les valeurs $\lambda a'+\mu a''+\nu a'''$, $\lambda b'+\mu b''+\nu b'''$, ... et de même pour un plus grand nombre de relations. En supposant par exemple que la courbe $U=0$ doit avoir un point de rebroussement, ce qui implique deux relations entre les coefficients, la question à resoudre serait celle-ci „quel est le nombre des points qui sont chacun un point de rebroussement d'une courbe particulière du système $\lambda V+\mu W+\nu X=0$"; je reserve à une autre occasion la considération de ce problème.

Londres, 22ième Mai 1863.

Considérations géométriques, destinées à faciliter l'étude de la théorie des transcendantes elliptiques.

(Par M. *C. Küpper* à Trèves.)

---

1. Lemme. Lorsque le côté AB d'un triangle ABC tourne infiniment peu sur un de ses points O, les deux autres côtés éprouvent des variations dCA, dCB, telles, que:

$$\frac{dCA}{dCB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{OA}{OB}.$$

C'est la relation connue entre les six segments, qu'une transversale détermine sur les côtés d'un triangle.

Remarque. A l'aide de ce lemme on peut intégrer géométriquement certaines équations différentielles:

1er exemple. Si O est situé sur la bissectrice de l'angle ACB, on a $\frac{OA}{OB} = \frac{CA}{CB}$, donc, en introduisant les variables $y = CA$, $x = CB$, en vertu du lemme:

$$\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2} = 0.$$

L'intégration fournit $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} =$ une constante. D'autre part, puisque les droites AB passent par O, cette équation doit avoir lieu.

2e exemple. Si AB touche constamment une hyperbole, dont CA, CB sont les asymptotes, le point de contact O divisera AB en deux parties égales, par conséquent:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0.$$

En intégrant on trouve $xy =$ une constante, ce qui résulte également des propriétés de l'hyperbole.

On pourrait multiplier ces exemples; nous nous contentons d'en étudier celui, auquel se rattachent quelques conséquences importantes.

2. Théorème. *Étant données deux coniques homofocales et de même espèce E, E'; si par un point pris arbitrairement sur E' on mène deux tangentes à E, l'excès de la somme de ces tangentes sur l'arc de E, compris entre les points de contact est une quantité constante.*

Par les extrémités P, P' d'un élément de E' soient menées à E les quatre tangentes PT_1, PT_2, $P'T_1'$, $P'T_2'$. Les droites PT_1, PT_2 étant également inclinées sur l'élément PP', la variation totale de la somme PT_1+PT_2 sera $-T_1T_1'+T_2T_2'$, ou égale à la différence des arcs T_1T_2, $T_1'T_2'$; par suite:

$$PT_1+PT_2-\text{arc}\,T_1T_2 = \text{une constante.}$$

En d'autres termes: Lorsque les angles, circonscrits à deux arcs d'une conique E ont leurs sommets sur une conique E', homofocale à E, la différence de ces arcs peut être construite, ou exprimée par une fonction algébrique des coordonnées de leurs extrémités. Afin d'abréger, en parlant de coniques homofocales, nous supprimons l'expression „de même espèce", bien qu'elle soit toujours sous-entendue.

3. Théorème. *Lorsque le point de concours de deux tangentes d'une conique E décrit l'élément d'une conique homofocale E', les déplacements infiniment petits des points de contact sont entre eux comme les carrés des tangentes.*

En conservant la notation précédente, il s'agit d'exprimer le rapport $T_1T_1' : T_2T_2'$ ou $ds_1 : ds_2$. Pendant que P se meut sur la droite PP', la corde de contact T_1T_2 glisse sur le point O, pôle de PP'. Les quatre droites PT_1, PO, PT_2, PP' forment un faisceau harmonique, et parceque PP' est la bissectrice du supplément de l'angle T_1PT_2, PO sera celle de T_1PT_2; donc $\frac{OT_1}{OT_2}=\frac{PT_1}{PT_2'}$; ensuite, d'après 1.

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{PT_1^2}{PT_2^2}.$$

Remarque. Si E, E' sont deux ellipses, le rapport $PT_1 : PT_2$ peut être remplacé par le rapport des diamètres de E, parallèles à ces tangentes; cela se voit immédiatement quand on considère E comme la projection orthogonale d'un cercle, qui a pour diamètre le grand axe de E. Dans ce cas, pour déterminer un point T ou (x, y) de E, nous nous servons de l'angle ψ, au moyen duquel x, y s'expriment par $a\sin\psi$, $b\cos\psi$, (a, b étant les demi-axes de E); et nous appellerons un point, ainsi déterminé par l'angle ψ, simplement le point ψ. Maintenant, en exprimant ds_1, ds_2 et les diamètres, qui leur sont parallèles en fonctions de ψ_1, ψ_2, ce qui se fera encore à l'aide de propriétés projectives, on est conduit à l'équation différentielle:

$$\text{(I.)} \qquad \frac{d\psi_1}{\Delta\psi_1}=\frac{d\psi_2}{\Delta\psi_2}, \qquad k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

Pour le cas de deux hyperboles, on établira sans difficulté une équation analogue, mais les angles, qu'il faudrait introduire, n'ayant pas une signification géométrique assez simple, nous resterons dans l'hypothèse de deux ellipses.

Lorsqu'il s'agit de deux paraboles $y^2 = 2px$, $y^2 = 2qx$, on trouve:

$$\frac{dy_1}{\sqrt{1+\left(\frac{y_1}{p}\right)^2}} = \frac{dy_2}{\sqrt{1+\left(\frac{y_2}{p}\right)^2}}$$

(y_1, y_2 sont les coordonnées de deux points T_1, T_2 de la première parabole). En opérant sur cette équation, comme nous allons le faire sur (I.), on en déduira les propriétés fondamentales des fonctions exponentielles.

4. Addition des fonctions elliptiques. Pour plus de brièveté nous dirons, que deux arcs de conique E sont égaux, lorsqu'ils sont compris entre les côtés de deux angles, circonscrits à cette conique, et dont les sommets sont situés sur une conique homofocale E'. Bien que ces arcs aient une différence généralement différente de zéro, qu'on ne manquera pas d'appercevoir, quand on représente les arcs comme il a été fait dans le n° 2, et précisément à cause de cette dernière circonstance l'expression adoptée ne peut donner lieu à une équivoque.

En intégrant les deux membres de l'équation (I.) entre les limites correspondantes 0, ψ_1 et ψ_0, ψ_2, il vient:

$$\int_0^{\psi_1} \frac{d\psi_1}{\Delta\psi_1} = \int_{\psi_0}^{\psi_2} \frac{d\psi_2}{\Delta\psi_2}, \text{ ou, en posant } \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta\psi} = F(k, \psi) = u, \ \psi = \operatorname{am} u,$$

$$\text{(II.)} \qquad u_0 + u_1 = u_2.$$

Il en résulte cet énoncé: Si l'on prend pour limites d'intégrales elliptiques de première espèce les angles, qui déterminent les extrémités d'arcs d'ellipse égaux, ou en un mot les limites de tels arcs, ces intégrales auront la même valeur. Ainsi, l'égalité d'arcs d'ellipse, telle que nous l'avons définie, consiste en ce que les intégrales de 1ère espèce, qui ont les mêmes limites que ces arcs sont égales; tandis que les intégrales correspondantes de 2e espèce ont des différences algébriques.

Pour intégrer géométriquement l'équation (I.), on n'a donc qu'a construire un arc d'ellipse égal à un arc donné, ce qui se fera d'après le n° 2. Soient par exemple ψ_1, ψ_2 les limites de l'arc donné, ψ_3, ψ_4 celles d'un arc qui lui est égal, les arcs, limités par ψ_1, ψ_3 et ψ_2, ψ_4 étant encore égaux,

on a ce théorème: Quand deux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à une conique sont situés sur une conique homofocale, les côtés opposés de ce quadrilatère se coupent sur une seconde conique homofocale.

La solution géométrique du problème de l'addition se trouve suffisamment indiquée. Si dans l'équation (II.) on attribue à ψ_0 une valeur déterminée, on obtient tous les couples de valeurs correspondantes ψ_1, ψ_2 à l'aide d'une certaine ellipse E', homofocale à E. Parceque E' doit contenir le point d'intersection des deux tangentes à E aux points 0 et ψ_0, elle est complètement déterminée; on l'appellera la conjuguée de E par rapport à l'angle ψ_0 ou à $\mathrm{am}\, u_0$. Réciproquement, deux ellipses homofocales E, E' étant données, on saura toujours assigner l'angle ψ_0, par rapport auquel l'une E' sera la conjuguée de E.

On a pour les demi-axes $\sqrt{a^2+\lambda_0}$, $\sqrt{b^2+\lambda_0}$ de E':

$$\text{(III.)}\quad \begin{cases} \sqrt{a^2+\lambda_0} = a\sqrt{\dfrac{1+\Delta\psi_0}{1+\cos\psi_0}}, \quad \sqrt{b^2+\lambda_0} = b\sqrt{\dfrac{1+\Delta\psi_0}{\cos\psi_0+\Delta\psi_0}}. \\ \text{Et: } \cos\psi_0 = \dfrac{a^2b^2-\lambda_0^2}{a^2b^2+2a^2\lambda_0+\lambda_0^2}, \quad \sin\psi_0 = \dfrac{2a\sqrt{(a^2+\lambda_0)(b^2+\lambda_0)\lambda_0}}{a^2(b^2+\lambda_0)+\lambda_0(a^2+\lambda_0)}, \\ \Delta\psi_0 = \dfrac{b^2(a^2+\lambda_0)+\lambda_0(b^2+\lambda_0)}{a^2(b^2+\lambda_0)+\lambda_0(a^2+\lambda_0)}. \end{cases}$$

En tenant compte de la relation géométrique, qui existe entre les points 0, ψ_0 et ψ_1, ψ_2; savoir, que les tangentes en ces points se coupent sur E', homofocale à E, on déduit aisément:

$$\cos\psi_0 = \cos\psi_1\cos\psi_2 + \sin\psi_1\sin\psi_2\Delta\psi_0.$$

Quant à la différence des arcs d'ellipse, limités par 0, ψ_0 et ψ_1, ψ_2, on l'évaluera de la manière suivante:

Soient T_1P, T_2P les tangentes en ψ_1, ψ_2. Si l'on considère E comme la projection orthogonale du cercle, décrit sur $2a$ comme diamètre, on reconnait sur le champ que

$$T_1P = a\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\psi_2-\psi_1)\Delta\psi_1, \quad T_2P = a\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\psi_2-\psi_1)\Delta\psi_2.$$

En écrivant $\dfrac{1-\cos(\psi_2-\psi_1)}{\sin(\psi_2-\psi_1)}$ au lieu de $\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\psi_2-\psi_1)$, et faisant usage des formules:

$$\sin\psi_0\Delta\psi_1 = \cos\psi_1\sin\psi_2 - \sin\psi_1\cos\psi_2\Delta\psi_0,$$
$$\sin\psi_0\Delta\psi_2 = \cos\psi_1\sin\psi_2\Delta\psi_0 - \sin\psi_1\cos\psi_2,$$

on obtient:

$$T_1P+T_2P = a\frac{1-\cos\psi_0}{\sin\psi_0}(1+\Delta\psi_0)+\frac{\cos\psi_0-\cos(\psi_2-\psi_1)}{\sin\psi_0}(1+\Delta\psi_0),$$

équation qui à l'aide de la formule

$$\cos\psi_0 = \cos\psi_1\cos\psi_2+\sin\psi_1\sin\psi_2\Delta\psi_0$$

se change en

$$T_1P+T_2P = a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi_0(1+\Delta\psi_0)-ak^2\sin\psi_0\sin\psi_1\sin\psi_2.$$

Posant $\psi_1=0$, $\psi_2=\psi_0$, cette somme devient: $a\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi_0(1+\Delta\psi_0)$. Telle est donc la somme des tangentes en 0, ψ_0; par conséquent il vient pour la différence des arcs en question: $ak^2\sin\psi_0\sin\psi_1\sin\psi_2$.

5. Multiplication. Soit toujours E' la conjuguée de E par rapport à l'angle ψ_0. Tirons dans E' des cordes consécutives, de manière qu'elles touchent E aux points ψ_1, ψ_2, ... ψ_{n+1}, nous aurons:

$$F(k,\psi_{n+1}) = nF(k,\psi_0)+F(k,\psi_1), \quad \text{où } \psi_1 \text{ est quelconque, p. e. } =0.$$

Donc, $\psi_0=\operatorname{am}u_0$ étant donnée, on saura construire l'amplitude d'une intégrale, égale à un multiple n de u_0.

Lorsqu'en procédant de cette sorte, il arrive que la $n+1^{\text{ième}}$ corde s'applique sur la première, u_0 et $4F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\omega$ seront commensurables; et réciproquement, pour qu'une corde ultérieure coincide avec la première, il est nécessaire et il suffit, qu'on ait $u_0=\frac{h}{n}\omega$, h étant premier avec n. Supposons, que l'angle $\psi_0=\operatorname{am}u_0$ satisfasse à cette condition: Alors de ce qu'elle est indépendante de l'angle ψ_1, qui marque sur E le point de contact de la première corde, on conclura qu'il existe une infinité de polygones circonscrits à E et inscrits à E', de sorte, que telle tangente à E, qu'on voudra, puisse devenir le côté de l'un d'entre eux. Tous ces polygones ont n côtés; leurs périmètres feront un nombre constant de fois h le tour entier de l'espace angulaire, c'est-à-dire qu'ils sont tous circonscrits à un multiple constant h de l'ellipse entière E, et inscrits à ce même multiple de E'. En outre on découvre aisément, qu'ils jouissent des propriétés suivantes:

I. Les polygones, qui sont à la fois circonscrits à une ellipse E, et inscrits à une ellipse homofocale E' ont des périmètres égaux.

Ce périmètre peut être évalué par les formules équivalentes:

$$(\alpha.) \qquad 2\sqrt{(a^2+\lambda_0)(b^2+\lambda_0)\lambda_0}\,\Sigma\frac{(\Delta\psi)^2}{b^2+\lambda_0(\Delta\psi)^2},$$

la somme renfermant tous les angles ψ_1, ψ_2, ...,

$$(\beta.) \qquad 2\sqrt{(a^2+\lambda_0)(b^2+\lambda_0)\lambda_0}\,\Sigma\frac{1}{\lambda_0+d^2},$$

où d représente un demi-diamètre de E parallèle à un côté du polygone, le signe somme s'étendant à tous ces côtés,

$$(\gamma.) \qquad \sqrt{(a^2+\lambda_0)(b^2+\lambda_0)\lambda_0}\,\Sigma\frac{(a^2+\lambda_0)+(b^2+\lambda_0)-n^2}{(a^2+\lambda_0)(b^2+\lambda_0)-\lambda_0 n^2},$$

où n représente les distances n_1, n_2, ... du centre de E aux différentes normales qu'on aurait menées à E en ψ_0, ψ_1, ...

II. Entre tous les polygones convexes p_h de n côtés et dont les périmètres sont inscrits au même multiple h de l'ellipse entière E', ceux qui sont circonscrits à une ellipse homofocale E, ont un périmètre maximum.

III. Entre tous les polygones convexes p_h de n côtés et dont les périmètres se trouvent circonscrits au même multiple h de l'ellipse entière E, ceux qui sont inscrits à une ellipse homofocale E_1 ont un périmètre minimum.

Les numéros II., III. contiennent la solution d'une question soulevée par M. *Steiner* (Journal de *Liouville*, avril 1841). Avant d'aborder le n° III., on résoudra ce problème:

Étant donnés un arc de conique et l'angle circonscrit; tirer à cet arc une tangente de telle manière, que la ligne brisée convexe, qui joint les extrémités de l'arc donné et qui se compose de deux parties des tangentes extrêmes et du segment intercepté par ces dernières sur la tangente intermédiaire, soit la plus petite possible.

On verra, que la tangente cherchée doit toucher l'arc à son milieu, ou, on trouvera ses points d'intersection avec les tangentes extrêmes sur une conique homofocale à celle, dont l'arc donné fait partie.

Quant à la construction, voyez n° 6.

IV. L'ellipse E' qui contient les sommets d'un polygone p_h est la conjuguée de E par rapport à l'angle $\mathrm{am}\frac{h}{n}\omega$, les points de contact ψ_1, ψ_2, ... des côtés de p_h avec E sont séparés par des arcs d'ellipse égaux, auquels correspondent des intégrales de première espèce, ayant toutes la même valeur: $\frac{h}{n}\omega$. On pourra ranger les points ψ dans un autre ordre, de manière qu'ils soient encore séparés par un intervalle constant, et que l'intégrale correspon-

dante soit un multiple quelconque de $\frac{h}{n}\omega$. Désignons par $\frac{qh}{n}\omega$ ce multiple, et supposons q premier avec n: alors il est clair qu'on passera par tous les points ψ, avant de revenir au point de départ ψ_1. Si donc, dans cet arrangement, on remplace les points ψ par les côtés correspondants de p_h, en prolongeant chacun d'eux jusqu'à la rencontre du suivant, on formera de nouveaux polygones de n côtés, circonscrits à E et inscrits dans des ellipses homofocales à E. Les angles, par rapport auquels ces dernières seront les conjuguées de E, se trouvent compris dans l'expression $\mathrm{am}\frac{\nu}{n}\omega$, où l'on entend par ν un nombre premier avec n, et plus petit que $\frac{1}{2}n$; et il y aura autant de ces ellipses, qu'il y a des nombres ν, savoir $\frac{1}{2}\varphi(n)$.

Les mêmes angles $\mathrm{am}\frac{\nu}{n}\omega$ permettent de distinguer entre eux les polygones circonscrits à E, en tant qu'ils sont inscrits à l'une ou l'autre des $\frac{1}{2}\varphi(n)$ ellipses homofocales: car le nombre ν indique, combien de fois le périmètre du polygone correspondant fait le tour entier de l'espace angulaire, ou à quel multiple de E il est circonscrit. En supposant $\nu = 1$, on se voit conduit à des polygones p_1, dont les côtés donnent par leurs points de contact avec E, la division de cette courbe en n parties égales; ainsi on peut toujours ranger les points ψ dans un tel ordre, qu'ils forment les points de cette division.

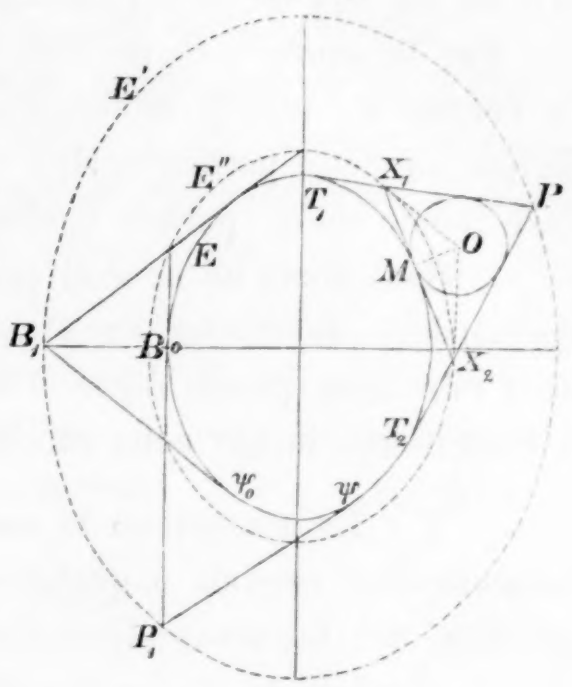
Actuellement, lorsqu'il s'agit d'exécuter cette division, on y emploiera l'une des $\frac{1}{2}\varphi(n)$ ellipses, et il faudra déterminer ses demi-axes $\sqrt{a^2+\lambda_0}$, $\sqrt{b^2+\lambda_0}$. A cette fin on peut avoir recours aux formules relatives à la division des fonctions elliptiques; mais on parvient à établir une équation entre $\cos\mathrm{am}\frac{\omega}{n}$, et $\Delta\mathrm{am}\frac{\omega}{n}$ à l'aide de certaines considérations géométriques, qui découlent des constructions mêmes, dont nous nous occupons. Cette équation une fois formée, on y remplacera $\cos\mathrm{am}\frac{\omega}{n}$, $\Delta\mathrm{am}\frac{\omega}{n}$ par leurs valeurs en λ_0 (voir n° 4).

Remarque. Par voie de dualité on trouve les polygones inscrits dont les côtés sous-tendent des arcs d'ellipse égaux, et qui sont circonscrits aux polaires réciproques d'ellipses homofocales à E; mais nous croyons inutile d'insister là-dessus.

6. Problème. Partager en deux parties égales un arc d'ellipse E (ou de conique), ou trouver le milieu M d'un tel arc.

Aux extrémités T_1, T_2 de l'arc donné (Fig. 1) tirons les tangentes T_1P, T_2P, et par leur point de concours P faisons passer une ellipse (conique) E' homofocale à E. Par un sommet B_1 de E' menons deux tangentes à E; elles comprendront entre elles un arc d'ellipse, égal à T_1T_2, et dont le milieu est le sommet B de E. Par les deux points, où la tangente en B rencontre les deux tangentes qui se coupent en B_1 on fera passer une ellipse (conique) E'' homofocale à E. Alors, en joignant les points d'intersection de E'' avec les tangentes T_1P, T_2P, savoir les points X_1, X_2 on aura la tangente au milieu cherché M.

Fig. 1.



On sait que les tangentes X_1O, X_2O à E'' sont les bissectrices des angles PX_1X_2, PX_2X_1; donc O est le centre de la circonférence inscrite au triangle PX_1X_2. Or, parceque X_1X_2, polaire de O par rapport à E'' est tangente à l'ellipse (conique) homofocale E, OM doit être perpendiculaire à X_1X_2. De là on voit, que la circonférence inscrite à PX_1X_2 touche la droite X_1X_2 en M; ou bien l'arc T_1T_2 en son milieu.

Ensuite, en exprimant la différence des arcs T_1M, MT_2 d'après le n° 2; on la trouve $= MX_2 + X_2T_2 - MX_1 - X_1T_1 = T_2P - T_1P$; d'où suit le

Théorème. *Lorsqu'à un triangle mixtiligne, formé par deux tangentes d'une conique et l'arc compris entre elles, une circonférence est inscrite, le point de contact de la circonférence avec la conique partage l'arc de celle-ci en deux parties, dont la différence est égale à la différence des deux tangentes.*

Depuis la publication des „producioni matematiche" de *Fagnano* on savait partager le quart d'ellipse en deux parties, dont la différence égale celle des demi-axes; mais le procédé qui résulte des recherches du géomètre italien ne fait entrevoir ni le théorème général, ni la construction que ce théorème fournit pour le cas particulier d'un quart d'ellipse.

Quand l'une des extrémités de l'arc à diviser est un sommet de E, la construction se simplifie encore: Prenons par exemple l'arc limité par les

points o, (sommet du petit axe de E) et ψ; les tangentes en ces points se coupant en P_1, on fera passer par P_1 la conjuguée de E par rapport à l'angle ψ. Par le sommet B_1 de cette ellipse on tirera une tangente à E, le point de contact ψ_0 sera le milieu cherché. En employant le même procédé, pour diviser en deux parties égales l'arc $o\psi_0$, on obtiendra la sous-division de l'arc donné en 2^2 parties égales, et ainsi de suite.

Sans doute on ne doit pas attribuer une valeur pratique à cette méthode géométrique de diviser en 2^n parties égales une intégrale de première espèce; mais elle nous parait digne d'être remarquée par la raison qu'elle présente à l'esprit une image nette et précise de cette division.

7. En soumettant la construction précédente à l'analyse, on est assez naturellement conduit à quelques formules fondamentales concernant la multiplication des fonctions elliptiques.

Conformément au théorème, que nous venons d'énoncer, la différence δ des deux arcs T_1M, MT_2 dont les extrémités correspondent aux points ψ_1, μ et μ, ψ_2 est:

$$\delta = a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1)(\Delta\psi_2 - \Delta\psi_1).$$

D'un autre côté (n° 4) on a

$$\delta = a k^2 \sin\mu \sin\psi_0 (\sin\psi_1 - \sin\psi_2),$$

donc:

$$\sin\mu = \frac{\cos\psi_1 - \cos\psi_2}{\sin\psi_0 (\Delta\psi_1 + \Delta\psi_2)}.$$

Et comme μ se change en ψ_0, quand ψ_1, ψ_2 deviennent o, ψ, on aura:

$$\sin^2\psi_0 = \frac{1-\cos\psi}{1+\Delta\psi} \quad \text{et} \quad \cos^2\psi_0 = \frac{\cos\psi+\Delta\psi}{1+\Delta\psi}, \quad (\Delta\psi_0)^2 = \frac{\cos\psi+\Delta\psi}{1+\cos\psi}.$$

Posons $\cos\psi = \cos\operatorname{am} u = c$, $\dfrac{\cos\psi}{\Delta\psi} = \sin\operatorname{coam} u = s$, $\cos\psi_0 = c_0$, $\dfrac{\cos\psi_0}{\Delta\psi_0} = s_0$, il vient:

(V.)
$$c_0^2 = \frac{c(1+s)}{c+s}, \qquad s_0^2 = \frac{s(1+c)}{c+s},$$

par conséquent:

$$c = \frac{-1+c_0^2+s_0^2}{1-c_0^2+s_0^2}, \quad s = \frac{-1+c_0^2+s_0^2}{1+c_0^2-s_0^2}, \quad \frac{\sin\psi}{\sin\psi_0} = \frac{2s}{1-c_0^2+s_0^2}.$$

Ou, h désignant un nombre entier quelconque:

$$\text{(VI.)} \qquad \operatorname{cosam} 2hu_0 = \frac{\sin^2 \operatorname{coam} hu_0 - \sin^2 \operatorname{am} hu_0}{\sin^2 \operatorname{coam} hu_0 + \sin^2 \operatorname{am} hu_0},$$

$$\text{(VII.)} \qquad \frac{\operatorname{sin\,am} 2hu_0}{s_0 \operatorname{sin\,am} u_0} = \frac{2 \dfrac{\operatorname{sin\,am} hu}{\operatorname{sin\,am} u} \cdot \dfrac{\operatorname{sin\,coam} hu}{s_0}}{\sin^2 \operatorname{coam} hu + \sin^2 \operatorname{am} hu}.$$

Si dans l'expression générale de $\sin \mu$ on remplace $\Delta\psi_1 + \Delta\psi_2$ par

$$\frac{1 + \Delta\psi}{\sin \psi} \sin(\psi_2 - \psi_1) \qquad \text{(voir n° 4.)},$$

elle devient:

$$\sin \mu = \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2}{\sin \psi_0 \dfrac{1 + \Delta\psi}{\sin \psi} \sin(\psi_2 - \psi_1)}.$$

Les formules (V.) donnent: $\dfrac{1 + \Delta\psi}{\sin \psi} = \dfrac{1}{s_0 \sin \psi_0}$, donc

$$\sin \mu = \frac{s_0 (\cos \psi_1 - \cos \psi_2)}{\sin(\psi_2 - \psi_1)}.$$

Ensuite, de $\cos \psi_0 = \cos \psi_1 \cos \mu + \sin \psi_1 \sin \mu \, \Delta\psi_0 = \cos \psi_2 \cos \mu + \sin \psi_2 \sin \mu \, \Delta\psi_0$ on tire:

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2}{\Delta\psi_0 (\sin \psi_2 - \sin \psi_1)},$$

donc:

$$\cos \mu = \frac{c_0 (\sin \psi_2 - \sin \psi_1)}{\sin(\psi_2 - \psi_1)}.$$

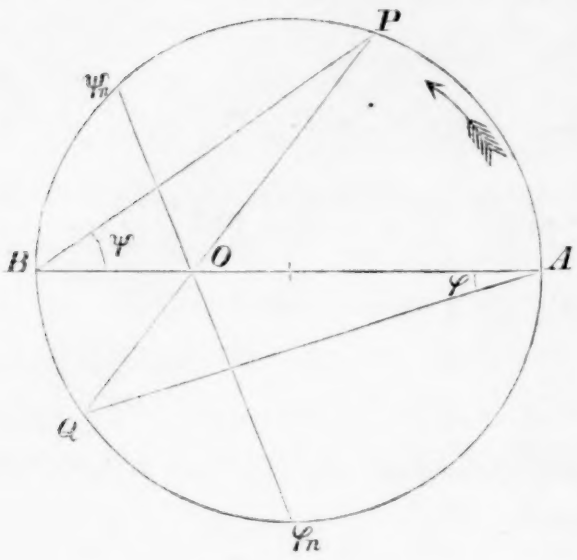
En posant $\psi_1 = \operatorname{am} 2hu_0$, $\psi_2 = \operatorname{am} 2(h+1)u_0$, et $\mu = \operatorname{am}(2h+1)u_0$, on a:

$$\text{(VIII.)} \quad \frac{\operatorname{sin\,am}(2h+1)u_0}{\operatorname{sin\,am} u_0} = \frac{\dfrac{\operatorname{cos\,am} 2hu_0}{\operatorname{sin\,am} u_0} - \dfrac{\operatorname{cos\,am} 2(h+1)u_0}{\operatorname{sin\,am} u_0}}{\dfrac{\operatorname{sin\,am} 2(h+1)u_0}{s_0} \operatorname{cos\,am} 2hu_0 - \dfrac{\operatorname{sin\,am} 2hu_0}{s_0} \operatorname{cos\,am} 2(h+1)u_0},$$

$$\text{(IX.)} \quad \frac{\operatorname{cos\,am}(2h+1)u_0}{c_0} = \frac{\dfrac{\operatorname{sin\,am} 2(h+1)u_0}{s_0 \operatorname{sin\,am} u_0} - \dfrac{\operatorname{sin\,am} 2hu_0}{s_0 \operatorname{sin\,am} u_0}}{\dfrac{\operatorname{sin\,am} 2(h+1)u_0}{s_0 \operatorname{sin\,am} u_0} \operatorname{cos\,am} 2hu_0 - \dfrac{\operatorname{sin\,am} 2hu_0}{s_0 \operatorname{sin\,am} u_0} \operatorname{cos\,am} 2(h+1)u_0}.$$

Mr. *Richelot* a fait remarquer, que les expressions en c_0, s_0, qui donnent $\dfrac{\operatorname{sin\,am} nu_0}{\operatorname{sin\,am} u_0}$ et $\operatorname{cos\,am} nu_0$ se changent en $\dfrac{\operatorname{cos\,coam} nu_0}{\operatorname{cos\,coam} u_0}$ et $\operatorname{sin\,coam} nu_0$, par la permutation des lettres c_0, s_0.

Fig. 2.



On peut s'en convaincre par une considération géométrique fort simple*). Sur le diamètre AB d'un cercle (Fig. 2) soit pris le point fixe O, tel que $OA = a$, $OB = b$. Concevons une droite mobile PQ, qui, partant de la position initiale AB tourne indéfinement et toujours dans le même sens sur le point O; les points P, Q, où elle coupe la circonférence, détermineront deux arcs de cercle AP, BQ, ou deux angles $PBA = \psi$, $QAB = \varphi$. Ces angles varient d'une manière continue en passant par tous les états de grandeur; ils acquièrent ensemble les valeurs 0, π, 2π, quand PQ se confond pour la 1e, $2^{\text{ième}}$, $3^{\text{ième}}$ fois avec AB; enfin ils sont liés par la relation:

$$\frac{\operatorname{tang}\psi}{\operatorname{tang}\varphi} = \frac{a}{b}.$$

A l'aide du lemme (1.) on a:

$$\frac{d\psi}{OP} = \frac{d\varphi}{OQ}.$$

Or

$$OP = a\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\psi} = a\,\Delta\psi;$$

d'où par la permutation des lettres a, b:

$$OQ = b\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\sin^2\varphi} = b\,\Delta'\varphi;$$

par suite:

$$\frac{d\psi}{\Delta\psi} = \frac{a}{b}\,\frac{d\varphi}{\Delta'\varphi}.$$

Ainsi les deux intégrales $\int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{\Delta\psi}$ et $\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\Delta'\varphi}$ sont dans le rapport constant $a : b$. Donc, si l'on connait l'amplitude ψ_n d'une intégrale $= n\int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{\Delta\psi} = nu_0$ l'angle φ_n, fourni par notre construction, sera l'amplitude d'une intégrale $\int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\Delta'\varphi} = n\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\Delta'\varphi}$. De plus, il est manifeste, que quand on sera parvenu à former une équation entre ψ_n, ψ_0, a, b, on n'aura qu'à y remplacer ψ par

*) C'est cette considération géométrique dont *Jacobi* s'est servie pour construire la substitution de *Landen* (Lettre à M. *Hermite*, vol. 32 pag. 178 de ce Journal).

φ et à permuter a, b, pour avoir une équation, à laquelle un procédé analogue aurait conduit. Mais comme alors $\Delta\psi$ se change en $\Delta'\varphi$, on voit, que $\frac{\sin\psi_n}{\sin\psi_0}$ et $\cos\psi_n$ se changent en $\frac{\sin\varphi_n}{\sin\varphi_0}$ et $\cos\varphi_n$, lorsque dans les expressions qui servent à calculer les premières on écrit $\cos\varphi$ au lieu de c, $\frac{\cos\varphi}{\Delta'\varphi}$ au lieu de s. Or, la figure met en évidence les relations:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\psi}{\Delta\psi} = s, \qquad \frac{\cos\varphi}{\Delta'\varphi} = \cos\psi = c;$$

par conséquent le changement indiqué revient à permuter s_0, c_0; d'ailleurs puisque $\cos\varphi = s = \sin\operatorname{coam} u$, les formules $\cos\varphi_n$, $\frac{\sin\varphi_n}{\sin\varphi_0}$ représentent la même chose que $\sin\operatorname{coam} nu_0$, $\frac{\cos\operatorname{coam} nu_0}{\cos\operatorname{coam} u_0}$.

Actuellement, en examinant les quatre formules, qui permettent de calculer les fonctions $\cos\operatorname{am} 2hu_0$, $\frac{\sin\operatorname{am} 2hu_0}{s_0 \sin\operatorname{am} u_0}$, $\frac{\cos\operatorname{am}(2h+1)u_0}{c_0}$, $\frac{\sin\operatorname{am}(2h+1)u_0}{\sin\operatorname{am} u_0}$, ainsi que celles qui s'en déduisent par la permutation des lettres s, c, on reconnait facilement, qu'elles ne renferment que des puissances paires de s_0, c_0. En effet, on en serait assuré, si l'on savait que, suivant que h est impair ou pair, les fonctions:

$$\frac{\cos\operatorname{am} hu_0}{c_0}, \quad \frac{\sin\operatorname{am} hu_0}{\sin\operatorname{am} u_0}, \quad \cos\operatorname{am}(h+1)u_0, \quad \frac{\sin\operatorname{am}(h+1)u_0}{s_0 \sin\operatorname{am} u_0},$$

ou celles-ci:

$$\cos\operatorname{am} hu_0, \quad \frac{\sin\operatorname{am} hu_0}{s_0 \sin\operatorname{am} u_0}, \quad \frac{\cos\operatorname{am}(h+1)u_0}{c_0}, \quad \frac{\sin\operatorname{am}(h+1)u_0}{\sin\operatorname{am} u_0}$$

jouissent de la même propriété.

Or, puisque cela a lieu pour la première catégorie, si $h=1$, il en sera de même de la seconde, où l'on suppose d'abord $h=2$, et puis $h=4$: alors, les fonctions provenant de la première série pour $h=3$ étant comprises parmi celles que fournit la seconde catégorie pour $h=2$, $h=4$; la même chose se trouve démontrée pour $h=3$. Par là pour $h=6$ et pour le cas $h=5$, lequel est contenu dans les cas $h=4$, $h=6$; ainsi de suite.

8. Concevons les deux conjuguées de E par rapport aux angles $\operatorname{am} u_0$ et $\operatorname{am} nu_0$, et nommons $\sqrt{a^2+\lambda_0}$, $\sqrt{b^2+\lambda_0}$; $\sqrt{a^2+\lambda}$, $\sqrt{b^2+\lambda}$ leurs demi-axes. D'après ce que nous venons d'exposer, il sera facile, d'exprimer λ par λ_0. En effet, qu'on se reporte aux formules (III.), et qu'on les mette sous la forme:

$$a^2+\lambda = a^2\frac{\cos\mathrm{am}\,nu_0+\sin\mathrm{coam}\,nu_0}{\sin\mathrm{coam}\,nu_0\,(1+\cos\mathrm{am}\,nu_0)},$$

$$c_0=\frac{a^2b^2-\lambda_0^2}{a^2(b^2+\lambda_0)+\lambda(a^2+\lambda_0)}, \qquad s_0=\frac{a^2b^2-\lambda_0^2}{b^2(a^2+\lambda_0)+\lambda(b^2+\lambda_0)},$$

on reconnait qu'à l'aide d'elles on peut obtenir λ en fonction rationelle de c_0, s_0 et de λ_0.

Par exemple $n=2$:

$$\lambda=\frac{4a^2b^2\lambda_0(a^2+\lambda_0)(b^2+\lambda_0)}{(a^2b^2-\lambda_0^2)^2}=a^2\frac{1-s_0^2}{s_0^2}.$$

Cela découle au reste immédiatement de la liaison géométrique, établie entre $\psi_0=\mathrm{am}\,u_0$ et $\psi=\mathrm{am}\,2u_0$ par la construction du n° 6. Car, de ce que la tangente au point ψ_0 doit passer par l'extrémité B du demi-axe $\sqrt{b^2+\lambda}$, on conclut

$$c_0^2=\frac{b^2}{b^2+\lambda}, \qquad s_0^2=\frac{a^2}{a^2+\lambda}.$$

Mais on a de même d'après la formule (III.):

$$a^2+\lambda_0 = a^2\frac{c_0+s_0}{s_0(1+c_0)};$$

par conséquent

$$a^2+\lambda_0 = a\frac{a\sqrt{b^2+\lambda}+b\sqrt{a^2+\lambda}}{b+\sqrt{b^2+\lambda}},$$

ou

$$\lambda_0 = \frac{ab}{\lambda}(\sqrt{a^2+\lambda}-a)(\sqrt{b^2+\lambda}-b).$$

Faisant $\lambda=\infty$, on en tire $\lambda_0=ab$; et on trouve $\sqrt{a^2+ab}$, $\sqrt{b^2+ab}$ pour les demi-axes de l'ellipse, qui sert à diviser E en 2^2 parties égales. En remplaçant λ par la valeur trouvée, on calculera successivement les axes des conjuguées de E par rapport aux angles $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{2^2}$, ... $\frac{\omega}{2^n}$. Maintenant, si l'on suppose $u_0=\frac{\omega}{n}$, on obtient une équation en λ_0, ainsi qu'il suit:

1°. Soit n un nombre impair $=2m+1$. Imaginons l'ellipse entière E divisée en $2m+1$ parties égales, le point 0 étant le point de départ. En ayant égard à ce que la tangente au $m^{\text{ième}}$ point de division doit passer par l'extrémité du demi-axe $\sqrt{b^2+\lambda_0}$, on voit:

$$\cos^2\mathrm{am}\,mu_0 = \frac{b^2}{b^2+\lambda_0}.$$

De là on déduit l'équation cherchée en exprimant $\cos\mathrm{am}\,mu_0$ par λ_0.

2°. Soit n le double d'un nombre impair $= 2(2m+1)$. Imaginons, qu'on divise E en n parties égales et qu'on mène au $m^{\text{ième}}$ point de la division une tangente; celle-ci passera par l'extrémité de l'axe $\sqrt{a^2+\lambda_0}$, et il suit:

$$\sin^2 \operatorname{am} mu_0 = \frac{a^2}{a^2+\lambda_0},$$

ou

$$\cos^2 \operatorname{am} mu_0 = \frac{\lambda_0}{a^2+\lambda_0}.$$

Ainsi, dans chacun de ces deux cas, on n'aura qu'à former l'expression qui donne $\cos \operatorname{am} mu_0$ en fonction de λ_0. Mais si l'on considère, que c_0, s_0 ne changent pas de valeur absolue, mais seulement de signe lorsqu'on remplace λ_0 par $\frac{a^2b^2}{\lambda_0}$, et que, par conséquent, $\cos^2 \operatorname{am} mu_0$ n'éprouve aucun changement par cette substitution; on voit, que l'équation relative au premier cas se transforme dans celle qui convient au second, quand on substitue $\frac{a^2b^2}{\lambda_0}$ au lieu de λ_0, et réciproquement.

Exemple: $n=3$, $m=1$.

1er cas: $\cos \operatorname{am} mu_0 = c_0 = \frac{a^2b^2-\lambda_0^2}{a^2b^2+2a^2\lambda_0+\lambda_0^2}$, donc

$$\left(\frac{a^2b^2-\lambda_0^2}{a^2b^2+2a^2\lambda_0+\lambda_0^2}\right)^2 = \frac{b^2}{b^2+\lambda_0},$$

d'où:

$$\lambda_0^4 - 6a^2b^2\lambda_0^2 - 4a^2b^2(a^2+b^2)\lambda_0 - 3a^4b^4 = 0.$$

2ième cas: $n=6$, $m=1$. Remplaçant λ_0 par $\frac{a^2b^2}{\lambda_0}$, on a:

$$3\lambda_0^4 + 4(a^2+b^2)\lambda_0^3 + 6a^2b^2\lambda_0^2 - a^4b^4 = 0.$$

Par la supposition $a^2 = 2b^2$, laquelle se rapporte à la division de la lemniscate. les premiers membres de ces équations se décomposent en deux facteurs du second degré. L'équation relative au cas $n=3$ devient, en remplaçant λ_0 par z:

$$(z^2+2b^2\sqrt{3}\,z+2b^4\sqrt{3})(z^2-2b^2\sqrt{3}\,z-2b^4\sqrt{3}) = 0.$$

Des deux valeurs réelles de z savoir $(\sqrt{3+2\sqrt{3}}+\sqrt{3})b^2$ et $(\sqrt{3}-\sqrt{3+2\sqrt{3}})b^2$, la première étant prise pour λ_0, fournit les axes de la conjuguée de E par rapport à $\operatorname{am}\frac{\omega}{3}$, ensuite $\lambda_0 = \frac{2b^2}{\sqrt{3+2\sqrt{3}}+\sqrt{3}}$ donne les axes de la conjuguée de E par rapport à $\operatorname{am}\frac{\omega}{6}$.

9. Problème. Étant données les conjuguées de E par rapport aux angles $\operatorname{am}\frac{\omega}{n}$, $\operatorname{am}\frac{\omega}{m}$ où l'on suppose m, n premiers entre eux, construire la conjuguée de E par rapport à $\frac{\omega}{mn}$.

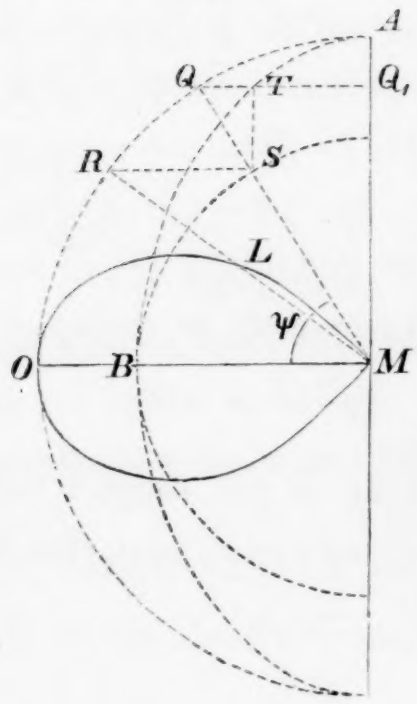
Employons les deux conjuguées données, pour diviser E en m et en n parties égales, de sorte que ces divisions partent du même point o, lequel est d'ailleurs arbitraire. Soient o, ψ_1, ψ_2, ... les points de la première division, o, φ_1, φ_2, ... ceux de la seconde; soient μ, ν deux nombres entiers, qui satisfont à l'équation $\nu m - \mu n = \pm 1$. En ψ_ν, φ_μ menons deux tangentes à E, leur point de concours appartiendra à l'ellipse cherchée.

Imaginons, qu'après avoir divisé E en n parties égales en $o, \psi_1, \psi_2, \ldots$, on parte successivement de chacun de ces points pour la diviser $n$fois de suite en m parties égales, de cette manière on obtiendra mn points distincts, qui déterminent évidemment la division de E en mn parties égales. Si m, n ne sont pas premiers entre eux, en procédant comme il a été dit, on divisera E en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le plus petit multiple ν de m, n. Car, posons $m = tx$, $n = ty$, où t est le plus grand commun diviseur entre m et n. Il est aisé de voir, que les y divisions qui ont pour points de départ o, ψ_1, ψ_2, ... ψ_y fournissent $ym = \nu$ points distincts, et qu'en partant de ψ_{y+1}, ψ_{y+2}, ... on doit retrouver ces mêmes points dans le même ordre qu'auparavant. D'ailleurs il est manifeste, que ces ν points appartiennent à la division de E en ν parties égales.

Ainsi, les amplitudes de $\frac{\omega}{m}$, $\frac{\omega}{n}$ étant connues, on saura construire $\mathrm{am}\frac{\omega}{\nu}$.

10. Application à la Lemniscate. Pour appliquer à la lemniscate les résultats obtenus, nous ferons dépendre la construction de cette courbe de celle d'une ellipse aux demi-axes $MB = b$, $MA = b\sqrt{2}$ (Fig. 3).

Fig. 3.



Soit T un point de l'ellipse, déterminé par l'angle ψ, de sorte qu'on ait $QQ_1 = b\sqrt{2}\cos\psi$; on trouvera un point L, correspondant à T de la manière suivante:

Du centre M, avec des rayons $= MA$, MB nous décrivons deux cercles; par T nous tirons TS perpendiculairement à MB, par S, où cette perpendiculaire rencontre le petit cercle nous menons à MB une parallèle, qui coupe en R le grand cercle; enfin sur MR nous faisons $ML = QQ_1$. Alors le point L appartient à la lemniscate, et il limite un arc OL de cette courbe, tel que:

$$\text{arc}\,OL = b.F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \psi).$$

L'arc correspondant de l'ellipse a pour mesure:

$$\text{arc}\,BT = b\sqrt{2}\,E(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \psi).$$

Or, pour avoir des arcs de lemniscate égaux, on prendra des arcs d'ellipse égaux, et construira les arcs de lemniscate, dont les extrémités correspondent à celles de ces arcs d'ellipse.

Trèves, 1863.

Note 1ère.

Les théorèmes 2., 3. établissent des rapports entre deux coniques homofocales, mais on apperçoit que le premier est moins général que le second, en ce qu'il exige que les coniques en question ne se coupent pas, tandisque cette restriction est inutile pour le second. Cependant, en raisonnant comme nous l'avons fait dans la démonstration de 2., on verifiera les énoncés suivants:

1°. *Lorsque par le sommet P d'un angle circonscrit à une ellipse E on fait passer une hyperbole homofocale à E et coupant celle-ci en un point M, ce point divisera en deux parties égales l'arc d'ellipse compris entre les côtés de l'angle donné. La différence de deux arcs d'ellipse égaux et contigus est égale à la différence des deux tangentes à leurs extrémités non coincidentes.*

En effet, si l'on considère deux angles SPT, $S'P'T'$, circonscrits à E, et dont les sommets P, P' sont deux points infiniment voisins de l'hyperbole PM, on n'a qu'à se rappeler, que la droite PP' divise en deux parties égales l'angle SPT, pour voir qu'en passant de cet angle à $S'P'T'$, la différence des deux tangentes SP, TP varie exactement comme la différence des arcs SM, TM et que ces variations ont pour mesure: $SS' - TT'$. Et cette observation conduit évidemment à la conclusion:

$$SP - TP = SM - TM.$$

2°. *Lorsque par le sommet d'un angle circonscrit à une branche d'hyperbole on fait passer une ellipse, homofocale à cette hyperbole et la coupant en un point M, ce point divisera en deux parties égales l'arc d'hyperbole compris entre les côtés de l'angle donné. La différence de deux arcs d'hyperbole égaux et contigus est égale à la différence des deux tangentes à leur extrémités non coincidentes.*

3°. *La même chose pour deux paraboles homofocales qui se coupent.*

On tire de là une nouvelle solution du problème 6., savoir:

Pour partager en deux parties égales un arc de conique T_1T_2, on lui circonscrira un angle T_1PT_2, et par P on fera passer une conique homofocale qui coupe l'arc T_1T_2 en M: ce point sera le milieu cherché.

En rapprochant nos deux solutions, on trouve:

Lorsqu'à un cercle variable, qui touche une conique E extérieurement en un point fixe M on circonscrit un angle, de façon qu'il soit de même circonscrit à E, son sommet sera sur une conique homofocale à E et coupant celle-ci en M.

On a ce cas particulier: Lorsqu'à un cercle variable, qui touche une droite m en un point fixe M on circonscrit un angle, dont les côtés doivent passer par deux points fixes F, F' de m, le sommet de cet angle restera sur une conique décrite des foyers F, F'. On peut remplacer la droite m par un plan m, le cercle variable par une sphère variable touchant m au point fixe M, l'angle circonscrit par un cône circonscrit à la sphère, lequel a pour trace dans le plan m une conique, dont M est l'un des foyers; alors on aura le théorème connu: Le lieu géométrique des sommets des cônes de révolution qui passent par une conique donnée, est une conique située dans un plan perpendiculaire au plan de la première; chacune de ces deux coniques a pour foyers les extrémités du grand axe de l'autre.

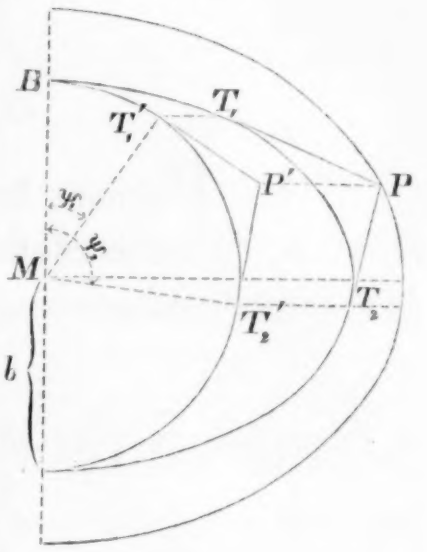
Voici une proposition qu'on démontre facilement en combinant les théorèmes 2., 3. avec 1°, 2°, 3°:

Soient m, n les côtés d'un angle variable circonscrit à une conique E, et dont le sommet est censé parcourir une conique E', homofocale à E; soient m', n' les côtés d'un angle également circonscrit à E, et placé symétriquement au premier par rapport à l'un des axes de E, de maniére que les côtés symétriques m, m' et n, n' se coupent sur cet axe ou sur son prolongement: Alors les points d'intersection des droites m, n' et n, m' seront situés sur une conique E'' homofocale à E, et ces coniques E'', E se couperont, ou ne se couperont pas, selon que E', E ne se coupent pas ou se coupent.

Note 2ième.

Sur la relation qui existe entre les limites d'intégrales elliptiques de 1ière espèce, ayant une valeur constante.

Fig. 4.



Nommons ψ_1, ψ_2 (Fig. 4) les limites d'une telle intégrale, T_1, T_2 les points de E, déterminés par les angles ψ_1, ψ_2 (voyez 4.); la relation dont il s'agit est l'expression analytique de ce fait, que les tangentes en T_1, T_2 se coupent sur l'ellipse E', homofocale à E. On la trouve rapidement ainsi qu'il suit:

Concevons qu'on incline le plan qui contient E, E' vers le plan du cercle décrit avec le demi-axe b comme rayon, de manière que ce cercle devienne la projection orthogonale de E: T_1', T_2', P' seront les projections de T_1, T_2, P, et le point P' appartiendra à la projection de E', c'est-à-dire à une ellipse aux demi-axes $\sqrt{b^2+\lambda}$, $\frac{b}{a}\sqrt{a^2+\lambda}$.

Comme on a: angle $BMT_1' = \psi_1$, $BMT_2' = \psi_2$; et $T_1'P'$, $T_2'P'$ étant des tangentes du cercle au rayon b, on aura:

$$MP' = \frac{b}{\cos\frac{1}{2}(\psi_2-\psi_1)}.$$

Par suite les coordonnées du point P' seront:

$$\frac{b}{\cos\frac{1}{2}(\psi_2-\psi_1)}\sin\tfrac{1}{2}(\psi_1+\psi_2) \quad \text{et} \quad \frac{b}{\cos\frac{1}{2}(\psi_2-\psi_1)}\cos\tfrac{1}{2}(\psi_1+\psi_2).$$

Si dans l'équation de la projection de E' on introduit ces valeurs, on obtient par une transformation qui se présente d'elle même:

$$\cos\psi_1\cos\psi_2+\frac{b^2(a^2+\lambda)+\lambda(b^2+\lambda)}{a^2(b^2+\lambda)+\lambda(a^2+\lambda)}\sin\psi_1\sin\psi_2 = \frac{a^2(b^2+\lambda)-\lambda(a^2+\lambda)}{a^2(b^2+\lambda)+\lambda(a^2+\lambda)}.$$

Posons $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \psi$, il vient:

$$\cos\psi = \frac{a^2(b^2+\lambda)-\lambda(a^2+\lambda)}{a^2(b^2+\lambda)+\lambda(a^2+\lambda)}; \quad \text{de là:} \quad \Delta\psi = \frac{b^2(a^2+\lambda)+\lambda(b^2+\lambda)}{a^2(b^2+\lambda)+\lambda(a^2+\lambda)}.$$

Ces équations permettent d'exprimer $a^2+\lambda$, $b^2+\lambda$ en fonctions de ψ, et de mettre la relation trouvée sous sa forme ordinaire:

$$\cos\psi_1\cos\psi_2+\sin\psi_1\sin\psi_2\Delta\psi = \cos\psi.$$

Propriétés du système des surfaces du second ordre conjuguées par rapport à un tétraèdre fixe.

(Par M. *Painvin* à Douai.)

---

1. Prenons le tétraèdre fixe pour tétraèdre de référence, et soient x, y, z, t, les cordonnées tétraèdriques d'un point de l'espace; une surface du second degré sera représentée par une équation homogène du second degré

$$f(x, y, z, t) = 0;$$

et l'équation du plan polaire d'un point $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sera

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} + \delta \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

J'appellerai *surfaces conjuguées par rapport à un tétraèdre fixe des surfaces telles que par rapport à chacune d'elles un sommet quelconque du tétraèdre soit le pôle de la face opposée.*

Nous désignerons toujours dans ce qui suit les quatre sommets du tétraèdre fixe par les lettre A, B, C, D.

Le tétraèdre fixe $ABCD$ étant pris pour tétraèdre de référence, on voit, par la formule qui précède, que l'équation générale des *surfaces conjugées* est

$$(1.) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$

a, b, c, d étant des constantes arbitraires.

Cette équation, renfermant trois paramètres arbitraires et étant linéaire par rapport à ces paramètres, représente un *système* de surfaces.

2. Je vais grouper ici plusieurs formules qui se présenteront fréquemment dans la suite de ce mémoire.

I. Les coordonnées tétraèdriques x, y, z, t d'un point μ étant définies par les relations

$$\begin{cases} x = \alpha\xi + \alpha_1\eta + \alpha_2\zeta + e, \\ y = \beta\xi + \beta_1\eta + \beta_2\zeta + f, \\ z = \gamma\xi + \gamma_1\eta + \gamma_2\zeta + g, \\ t = \delta\xi + \delta_1\eta + \delta_2\zeta + h, \end{cases}$$

en fonction des coordonnées cartésiennes (ξ, η, ζ) du point μ, je supposerai

les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ rectangulaires, et je regarderai les α_i, β_i, γ_i comme des cosinus; de sorte que $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$, $(\beta, \beta_1, \beta_2)$, etc. sont les cosinus des angles avec $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ des axes des quatres faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre de référence.

Les coordonnées x, y, z, t doivent vérifier une relation de la forme

$$(2.) \qquad mx+ny+pz+qt = \text{constante},$$

et l'équation du plan à l'infini sera

$$mx+ny+pz+qt = 0.$$

On voit aisément par les relations ci-dessus qu'on pourra prendre pour m, n, p, q les valeurs suivantes

$$m = -\begin{vmatrix} \beta & \gamma & \delta \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix}, \qquad p = -\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \end{vmatrix},$$

$$n = +\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix}, \qquad q = +\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

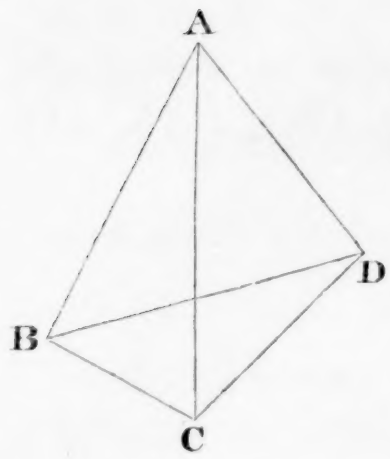
Or, si l'on pose

$$(3.) \quad \begin{cases} a_{12} = \cos(\widehat{xy}) = \alpha\beta+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2, & a_{23} = \cos(\widehat{yz}) = \beta\gamma+\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2, \\ a_{13} = \cos(\widehat{xz}) = \alpha\gamma+\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2, & a_{24} = \cos(\widehat{yt}) = \beta\delta+\beta_1\delta_1+\beta_2\delta_2, \\ a_{14} = \cos(\widehat{xt}) = \alpha\delta+\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2, & a_{34} = \cos(\widehat{zt}) = \gamma\delta+\gamma_1\delta_1+\gamma_2\delta_2, \end{cases}$$

on constate immédiatement que

$$(4.) \quad \begin{cases} m^2 = \begin{vmatrix} 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & 1 & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & 1 \end{vmatrix}, & p^2 = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & 1 \end{vmatrix}, \\ n^2 = \begin{vmatrix} 1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & 1 \end{vmatrix}, & q^2 = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix}; \end{cases}$$

on sait, de plus, que m est égal à six fois le volume du tétraèdre construit sur le trièdre (A, BCD) avec des longueurs égales à l'unité; n est égal à six fois le volume du tétraèdre construit sur le trièdre (B, DCA) avec des longueurs égales à l'unité; etc. . . . .



II. Le tétraèdre *ABCD* présente trois quadrilatères gauches; je désignerai par H_1, H_2, H_3 les hyperboloïdes passant respectivement par ces quadrilatères: leurs équations seront:

$$(5.)\quad \begin{cases} \text{pour } H_1 \text{ circonscrit au quadrilatère } ABDCA : \lambda yz + tx = 0, \\ \text{-} \quad H_2 \quad \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} \quad ABCDA : \mu zx + ty = 0, \\ \text{-} \quad H_3 \quad \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} \quad ACBDA : \nu xy + tz = 0. \end{cases}$$

Les conditions pour que la surface conjuguée

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

soit tangente à l'un ou à l'autre de ces hyperboloïdes sont

$$(6.)\quad \begin{cases} \text{pour } H_1 \quad \lambda^2 ad = bc, \\ \text{pour } H_2 \quad \mu^2 bd = ac, \\ \text{pour } H_3 \quad \nu^2 cd = ab. \end{cases}$$

III. L'équation

$$(7.)\quad \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = 0$$

représente un cône ayant son sommet en *D;* les trois plans qui forment le trièdre *D* sont respectivement les plans polaires des arêtes opposées par rapport à ce cône; je dirai que ce *cône* est *conjugué par rapport au trièdre D*. On a ainsi quatre cônes conjugués, ce sont les seuls cônes que puisse représenter l'équation (1.).

Les propriétés que nous observerons dans les surfaces conjuguées en fournissent d'analogues dans les cônes conjugués.

IV. Un *cône circonscrit* à un des trièdres du tétraèdre *ABCD,* au trièdre *D* par exemple, aura une équation de la forme

$$(8.)\quad \lambda yz + \mu xz + \nu xy = 0.$$

La condition pour qu'une surface conjuguée

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

soit tangente à ce cône s'obtiendra en identifiant les équations des plans tangents. On a ainsi

$$\frac{\mu z + \nu y}{ax} = \frac{\lambda z + \nu x}{by} = \frac{\mu x + \lambda y}{cz} = \frac{0}{dt};$$

ou, en ayant égard à la relation (8.)

$$\frac{\lambda yz}{ax^2} = \frac{\mu xz}{by^2} = \frac{\nu xy}{cz^2}, \qquad t = 0.$$

Les coordonnées du point de contact seront donc

$$(9.) \qquad \frac{ax^3}{\lambda} = \frac{by^3}{\mu} = \frac{cz^3}{\nu}, \qquad t = 0;$$

et nous trouverons pour la relation cherchée:

$$(10.) \qquad \sqrt[3]{\lambda^2 a} + \sqrt[3]{\mu^2 b} + \sqrt[3]{\nu^2 c} = 0.$$

V. Un *cône inscrit* à un des trièdres du tétraèdre $ABCD$, au trièdre D par exemple, aura une équation de la forme

$$(11.) \qquad \sqrt{\lambda x} + \sqrt{\mu y} + \sqrt{\nu z} = 0.$$

La condition pour qu'une surface conjuguée soit tangente à ce cône s'obtiendra en identifiant les équations des plans tangents. On a ainsi

$$\frac{\lambda(\lambda x - \mu y - \nu z)}{ax} = \frac{\mu(-\lambda x + \mu y - \nu z)}{by} = \frac{\nu(-\lambda x - \mu y + \nu z)}{cz} = \frac{0}{dt};$$

ou, en ayant égard à la relation (11.)

$$\frac{\sqrt{\lambda yz}}{ax} = \frac{\sqrt{\mu xz}}{by} = \frac{\sqrt{\nu xy}}{cz}, \qquad t = 0.$$

Les coordonnées du point de contact seront donc

$$(12.) \qquad \frac{a^2x^3}{\lambda} = \frac{b^2y^3}{\mu} = \frac{c^2z^3}{\nu}, \qquad t = 0;$$

et nous trouverons pour la relation cherchée:

$$(13.) \qquad \sqrt[3]{\frac{\lambda^2}{a}} + \sqrt[3]{\frac{\mu^2}{b}} + \sqrt[3]{\frac{\nu^2}{c}} = 0.$$

§. 1.

3. N'ayant essayé aucune classification des diverses propriétés que j'ai rencontrées dans cette étude, je me contenterai de les grouper sous un certain nombre de théorèmes.

Dans les énoncés qui suivent, j'entendrai par *faces opposées* de deux tétraèdres $ABCD$, $A'B'C'D'$ deux faces désignées par les mêmes lettres mais accentuées différemment.

4. Théorème I. *Considérons un point P_0 fixe dans l'espace et supposons le joint aux sommets du tétraèdre $ABCD$; soient A_1, B_1, C_1, D_1 les points où les droites P_0A, P_0B, P_0C, P_0D rencontrent une des surfaces conjuguées Σ passant par le point P_0. Les faces du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ couperont les faces opposées du tétraèdre $ABCD$ suivant quatre droites qui*

seront dans un même plan Π_1; le tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ et le plan Π_1 resteront fixes quelle que soit la surface conjuguée passant par le point P_0. Toute surface du second degré, passant par les quatre sommets du tétraèdre ABCD et par trois des sommets du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ passera nécessairement par le quatrième. Parmi ces surfaces, il y a trois hyperboloïdes circonscrits à la fois aux trois couples de quadrilatères gauches homologues (c. a. d. désignés par les mêmes lettres) que présentent les deux tétraèdres ABCD et $A_1B_1C_1D_1$.

En menant les plans tangents à la surface Σ aux points A_1, B_1, C_1, D_1, on forme un nouveau tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$. Les faces du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ couperont les faces opposées du tétraèdre ABCD suivant quatre droites qui seront dans un même plan Π_2 tangent à la surface Σ au point P_0. Toute surface du second degré, passant par les quatre sommets du tétraèdre ABCD et par trois des sommets du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ passera nécessairement par le quatrième. Parmi ces surfaces il y a trois hyperboloïdes circonscrits à la fois aux trois couples de quadrilatères gauches homologues que présentent les deux tétraèdres ABCD et $A_2B_2C_2D_2$. Le tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ se déforme lorsque la surface Σ change; mais ses sommets décrivent respectivement une surface du troisième ordre passant par les arêtes du tétraèdre ABCD.

Les quatre droites AA_2, BB_2, CC_2, DD_2 passent par le pôle P_1 du plan Π_1; lorsque la surface conjuguée change, le pôle P_1 décrit une surface du 3ième ordre passant aussi par les arêtes du tétraèdre ABCD.

Soit le point $P_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ par lequel passe une surface conjuguée Σ

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2 = 0,$$

de sorte qu'on a la relation

$$(14.) \qquad ax_0^2+by_0^2+cz_0^2+dt_0^2 = 0.$$

Joignons le point P_0 aux sommets du tétraèdre fixe *ABCD*, les droites P_0A, P_0B, P_0C, P_0D rencontreront la surface Σ en quatre points A_1, B_1, C_1, D_1, dont les coordonnées seront

$$\text{pour } A_1 \quad \frac{x}{-x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} = \frac{t}{t_0},$$

$$B_1 \quad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{-y_0} = \frac{z}{z_0} = \frac{t}{t_0},$$

$$C_1 \quad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{-z_0} = \frac{t}{t_0},$$

$$D_1 \quad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} = \frac{t}{-t_0};$$

ces quatre points restent fixes quelle que soit la surface conjuguée passant par le point P_0.

Les quatre faces du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ ont respectivement pour équations

$$B_1C_1D_1 \quad -\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}+\frac{t}{t_0}=0,$$

$$C_1D_1A_1 \quad \frac{x}{x_0}-\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}+\frac{t}{t_0}=0,$$

$$D_1A_1B_1 \quad \frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}-\frac{z}{z_0}+\frac{t}{t_0}=0,$$

$$A_1B_1C_1 \quad \frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}-\frac{t}{t_0}=0.$$

Il est évident que les intersections de ces plans avec les faces opposées du tétraèdre *ABCD* sont situées dans le plan

$$(\Pi_1) \qquad \frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}+\frac{t}{t_0}=0,$$

lequel plan reste fixe quelle que soit la surface conjuguée passant par le point P_0.

Faisons passer une surface du second degré par les sommets du tétraèdre *ABCD* et par trois des sommets du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$, A_1, B_1, C_1 par exemple. Si $\mu_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $\mu_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ sont deux points choisis arbitrairement pour déterminer complètement cette surface, nous aurons pour son équation

$$(15.) \qquad S=\begin{vmatrix} xy & xz & xt & yz & yt & zt \\ x_1y_1 & x_1z_1 & x_1t_1 & y_1z_1 & y_1t_1 & z_1t_1 \\ x_2y_2 & x_2z_2 & x_2t_2 & y_2z_2 & y_2t_2 & z_2t_2 \\ -x_0y_0 & -x_0z_0 & -x_0t_0 & y_0z_0 & y_0t_0 & z_0t_0 \\ -x_0y_0 & x_0z_0 & x_0t_0 & -y_0z_0 & -y_0t_0 & z_0t_0 \\ x_0y_0 & -x_0z_0 & x_0t_0 & -y_0z_0 & y_0t_0 & -z_0t_0 \end{vmatrix}=0.$$

Or, si dans cette équation on remplace x, y, z, t par les coordonnées $(x_0, y_0, z_0, -t_0)$ du point D_1, on constate en ajoutant les trois dernières lignes à la première, que le premier membre est identiquement nul. Donc une surface du second degré, passant par les quatre sommets du tétraèdre *ABCD* et par trois des sommets du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ passe nécessairement par le quatrième. La surface S restera fixe, quelle que soit la surface con-

juguée passant par le point P_0, si l'on suppose fixes les deux points μ_1, μ_2, qui servent à la déterminer complètement.

Parmi ces surfaces, nous devons remarquer les trois hyperboloïdes

$$(16.)\quad \begin{cases} \dfrac{xy}{x_0 y_0} + \dfrac{zt}{z_0 t_0} = 0, \\ \dfrac{xz}{x_0 z_0} + \dfrac{yt}{y_0 t_0} = 0, \\ \dfrac{xt}{x_0 t_0} + \dfrac{yz}{y_0 z_0} = 0. \end{cases}$$

Ces trois hyperboloïdes sont à la fois circonscrits aux couples de quadrilatères gauches que présentent les deux tétraèdres $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$. Ainsi le premier est circonscrit à la fois aux deux quadrilatères gauches $ACBDA$ et $A_1C_1B_1D_1A_1$; le second, aux deux quadrilatères $ABCDA$ et $A_1B_1C_1D_1A_1$; le troisième, aux quadrilatères $ABDCA$ et $A_1B_1D_1C_1A_1$. Ces proprietés se vérifient immédiatement.

Considérons maintenant les plans tangents à la surface Σ aux points A_1, B_1, C_1, D_1; ces quatre plans formeront un nouveau tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ dont les faces auront respectivement pour équations

$$\begin{aligned} B_2C_2D_2 \quad & -ax_0x + by_0y + cz_0z + dt_0t = 0, \\ C_2D_2A_2 \quad & ax_0x - by_0y + cz_0z + dt_0t = 0, \\ D_2A_2B_2 \quad & ax_0x + by_0y - cz_0z + dt_0t = 0, \\ A_2B_2C_2 \quad & ax_0x + by_0y + cz_0z - dt_0t = 0. \end{aligned}$$

Il est visible que les intersections de ces plans avec les faces opposées du tétraèdre $ABCD$ sont dans le plan

$$(\Pi_2)\qquad ax_0x + by_0y + cz_0z + dt_0t = 0;$$

ce plan, d'après la relation (14.), est tangent, au point P_0, à la surface conjuguée; par suite, il variera avec la surface Σ considérée.

Les coordonnées des sommets du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ sont définies par les relations

$$\begin{aligned} A_2 \quad & -ax_0x = by_0y = cz_0z = dt_0t, \\ B_2 \quad & ax_0x = -by_0y = cz_0z = dt_0t, \\ C_2 \quad & ax_0x = by_0y = -cz_0z = dt_0t, \\ D_2 \quad & ax_0x = by_0y = cz_0z = -dt_0t. \end{aligned}$$

En raisonnant, comme nous venons de le faire, on constate que

toute surface du second degré, passant par les sommets du tétraèdre $ABCD$ et par trois des sommets du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$, passe nécessairement par le quatrième.

Le tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ se déforme lorsque la surface Σ change, mais on voit, d'après la relation (14.), que ses sommets décrivent respectivement des surfaces fixes du 3ième ordre; ainsi

$$A_2 \text{ décrit } -\frac{x_0}{x}+\frac{y_0}{y}+\frac{z_0}{z}+\frac{t_0}{t}=0,$$

$$B_2 \quad . \quad . \quad \frac{x_0}{x}-\frac{y_0}{y}+\frac{z_0}{z}+\frac{t_0}{t}=0,$$

$$C_2 \quad . \quad . \quad \frac{x_0}{x}+\frac{y_0}{y}-\frac{z_0}{z}+\frac{t_0}{t}=0,$$

$$D_2 \quad . \quad . \quad \frac{x_0}{x}+\frac{y_0}{y}+\frac{z_0}{z}-\frac{t_0}{t}=0$$

Ces surfaces passent par les arètes du tétraèdre $ABCD$; les faces de ce tétraèdre sont donc des plans tangents triples.

On remarque encore que la 1^ière surface, par exemple, passe par les intersections des trois couples de plans

$$(B_1C_1BC,\ B_1C_1AD)$$
$$(B_1D_1BD,\ B_1D_1AC)$$
$$(C_1D_1CD,\ C_1D_1AB),$$

c'est-à-dire par les trois arètes de la face $B_1C_1D_1$.

Signalons aussi les trois hyperboloïdes

$$\begin{cases} abx_0y_0xy+cdz_0t_0zt=0, \\ acx_0z_0xz+bdy_0t_0yt=0, \\ adx_0t_0xt+bcy_0z_0yz=0, \end{cases}$$

qui sont à la fois circonscrits aux couples de quadrilatères gauches homologues que présentent les deux tétraèdres $ABCD$ et $A_2B_2C_2D_2$.

Les quatre droites AA_2, BB_2, CC_2, DD_2 ont pour équations respectives

$$AA_2 \quad by_0y=cz_0z=dt_0t,$$
$$BB_2 \quad ax_0x=cz_0z=dt_0t,$$
$$CC_2 \quad ax_0x=by_0y=dt_0t,$$
$$DD_2 \quad ax_0x=by_0y=cz_0z.$$

Ces quatre droites passent évidemment par le point

$$P_1 \quad ax_0x=by_0y=cz_0z=dt_0t,$$

lequel point est le pôle du plan fixe

$$\Pi_1 \quad \frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}+\frac{t}{t_0} = 0.$$

Ce point se déplace lorsqu'on fait varier la surface conjuguée passant par le point P_0; et, si l'on tient compte de la relation (14.), on voit qu'il décrit la surface fixe du 3ième ordre

$$(17.) \qquad \frac{x_0}{x}+\frac{y_0}{y}+\frac{z_0}{z}+\frac{t_0}{t} = 0.$$

5. Théorème II. *Considérons un plan fixe Π_0 et une surface conjuguée tangente à ce plan; joignons le point de contact P_0 aux sommets du tétraèdre ABCD et soient A_1, B_1, C_1, D_1 les points où les droites P_0A, P_0B, P_0C, P_0D rencontrent la surface conjuguée. Les faces du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ couperont les faces opposées du tétraèdre ABCD suivant quatre droites qui seront dans le même plan Π_1. Le plan Π_1 change lorsqu'on fait varier la surface conjuguée en la laissant tangente au plan Π_0; le tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ se déforme aussi, mais ses sommets décrivent respectivement quatre plans fixes. Toute surface du second degré, passant par les quatre sommets du tétraèdre ABCD et par trois des sommets du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ passera nécessairement par le quatrième. Parmi ces surfaces, il y a trois hyperboloïdes circonscrits à la fois aux trois couples de quadrilatères gauches homologues que présentent les deux tétraèdres ABCD et $A_1B_1C_1D_1$.*

En menant les plans tangents à la surface Σ aux points A_1, B_1, C_1, D_1 on forme un nouveau tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$. Les faces du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ couperont les faces opposées du tétraèdre ABCD suivant quatre droites qui seront dans le même plan fixe Π_0; le tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ est fixe aussi quelle que soit la surface conjuguée tangente au plan Π_0. Toute surface du second degré, passant par les sommets du tétraèdre ABCD et par trois des sommets du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$, passera nécessairement par le quatrième. Parmi ces surfaces, il y a trois hyperboloïdes circonscrits à la fois aux troix couples de quadrilatères gauches homologues que présentent les deux tétraèdres ABCD et $A_2B_2C_2D_2$.

Les quatre droites AA_2, BB_2, CC_2, DD_2 passent par un même point P_1 fixe, quelle que soit la surface conjuguée considérée.

Soit le plan fixe

$$(\Pi_0) \quad Ax+By+Cz+Dt = 0,$$

et une surface conjuguée Σ

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2 = 0$$

tangente à ce plan; ce qui entraine la relation

$$(18.) \qquad \frac{A^2}{a}+\frac{B^2}{b}+\frac{C^2}{c}+\frac{D^2}{d} = 0.$$

Les coordonnées du point de contact P_0 sont données par les équations

$$\frac{ax}{A}=\frac{by}{B}=\frac{cz}{C}=\frac{dt}{D}.$$

Les points d'intersection A_1, B_1, C_1, D_1 des droites P_0A, P_0B, P_0C, P_0D ont pour coordonnées

$$A_1 \quad \frac{-ax}{A}=\frac{by}{B}=\frac{cz}{C}=\frac{dt}{D},$$

$$B_1 \quad \frac{ax}{A}=\frac{-by}{B}=\frac{cz}{C}=\frac{dt}{D},$$

$$C_1 \quad \frac{ax}{A}=\frac{by}{B}=\frac{-cz}{C}=\frac{dt}{D},$$

$$D_1 \quad \frac{ax}{A}=\frac{by}{B}=\frac{cz}{C}=\frac{-dt}{D}.$$

Les faces du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ formé par ces quatre points seront

$$B_1C_1D_1 \quad -\frac{ax}{A}+\frac{by}{B}+\frac{cz}{C}+\frac{dt}{D} = 0,$$

$$C_1D_1A_1 \quad \frac{ax}{A}-\frac{by}{B}+\frac{cz}{C}+\frac{dt}{D} = 0,$$

$$D_1A_1B_1 \quad \frac{ax}{A}+\frac{by}{B}-\frac{cz}{C}+\frac{dt}{D} = 0,$$

$$A_1B_1C_1 \quad \frac{ax}{A}+\frac{by}{B}+\frac{cz}{C}-\frac{dt}{D} = 0.$$

Les intersections de ces plans avec les faces opposées du tétraèdre $ABCD$ sont dans le plan

$$\Pi_1 \quad \frac{ax}{A}+\frac{by}{B}+\frac{cz}{C}+\frac{dt}{D} = 0.$$

Ce plan est variable avec la surface conjuguée; les sommets du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ se déplacent aussi, mais en décrivant respectivement des plans fixes; ainsi

le sommet A_1 décrit le plan $-Ax+By+Cz+Dt = 0$, $B_2C_2D_2$,

B_1 . . . . . $Ax-By+Cz+Dt = 0$, $C_2D_2A_2$,

C_1 . . . . . $Ax+By-Cz+Dt = 0$, $D_2A_2B_2$,

D_1 . . . . . $Ax+By+Cz-Dt = 0$, $A_2B_2C_2$;

ceci résulte de la relation (18.); on voit en même temps que les surfaces conjuguées restent toujours tangentes à ces quatre plans.

Ces quatre plans sont tangents à la surface Σ aux points A_1, B_1, C_1, D_1 et forment un nouveau tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ évidemment fixe. Il est, en outre, visible que les plans du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ coupent les faces opposées du tétraèdre $ABCD$ suivant quatre droites situées dans le plan fixe

$$(\Pi_0) \quad Ax+By+Cz+Dt = 0.$$

On verrait, par un calcul identique à celui du n°. 4., que toute surface du second degré, passant par les quatre sommets du tétraèdre $ABCD$ et par trois des sommets du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ ou du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$, passera nécessairement par le quatrième.

Les équations (16.) nous montrent que les trois hyperboloïdes circonscrits à la fois aux quadrilatères gauches homologues des deux tétraèdres $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$ sont

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{ab}xy+\dfrac{CD}{cd}zt = 0, \\ \dfrac{AC}{ac}xz+\dfrac{BD}{bd}yt = 0, \\ \dfrac{AD}{ad}xt+\dfrac{BC}{bc}yz = 0. \end{cases}$$

Si l'on remarque que les coordonnées des sommets A_2, B_2, C_2, D_2 sont

$$\begin{aligned} \text{pour } A_2 \quad & -Ax = By = Cz = Dt, \\ B_2 \quad & Ax = -By = Cz = Dt, \\ C_2 \quad & Ax = By = -Cz = Dt, \\ D_2 \quad & Ax = By = Cz = -Dt; \end{aligned}$$

on voit que les trois hyperboloïdes circonscrits à la fois aux quadrilatères gauches homologues que présentent les deux tétraèdres $ABCD$ et $A_2B_2C_2D_2$ ont pour équations

$$\begin{aligned} ABxy+CDzt &= 0, \\ ACxz+BDyt &= 0, \\ ADxt+BCyz &= 0; \end{aligned}$$

ces trois surfaces restent fixes.

Les droites AA_2, BB_2, CC_2, DD_2 ont pour équations

$$AA_2 \quad By = Cz = Dt,$$
$$BB_2 \quad Ax = Cz = Dt,$$
$$CC_2 \quad Ax = By = Dt,$$
$$DD_2 \quad Ax = By = Cz;$$

ces quatre droites passent évidemment par le point fixe

$$(P_1) \quad Ax = By = Cz = Dt.$$

6. Théorème III. *Soit un plan fixe Π_0; imaginons quatre cônes ayant pour sommets les quatre sommets du tétraèdre ABCD et pour directrice commune la courbe d'intersection du plan Π_0 avec une surface conjuguée Σ. Ces quatre cônes couperont la surface Σ suivant quatre courbes planes; les plans de ces quatre courbes formeront un tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$, lequel restera fixe quelle que soit la surface conjuguée considérée. En outre, les faces de ce tétraèdre couperont les faces opposées du tétraèdre ABCD suivant quatre droites situées dans le plan fixe Π_0. Les droites AA_2, BB_2, CC_2, DD_2 passeront par un même point lequel sera fixe aussi.*

Si l'on circonscrit à la surface Σ des cônes suivant les courbes d'intersection des faces du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ avec cette surface, les sommets de ces cônes formeront un nouveau tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$. Les faces de ce tétraèdre couperont les faces opposées du tétraèdre ABCD suivant quatre droites situées dans un même plan. Les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 passent par un même point qui est le pôle du plan Π_0 par rapport à la surface Σ.

Une surface du second degré, passant par les quatre sommets du tétraèdre ABCD et par trois des sommets du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ ou du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$, passera nécessairement par le quatrième.

On rencontre encore, comme dans les théorèmes précédents, trois hyperboloïdes circonscrits à la fois aux couples des quadrilatères gauches que présentent, soient les tétraèdres ABCD et $A_1B_1C_1D_1$, soient les tétraèdres ABCD et $A_2B_2C_2D_2$.

Remarque. „Si le plan Π_0 est le même que celui qui a été con-„sidéré dans le théorème II., les tétraèdres $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ coincident „avec ceux que nous avons rencontrés dans le théorème cité. C'est qu'en „effet le théorème III. est une généralisation du théorème II.; et ce dernier „s'en déduit facilement en supposant la courbe directrice commune réduite à „un point; seulement les deux tétraèdres se présentent dans un ordre inverse.

„Malgré cette dépendance intime des deux propriétés, j'ai pensé qu'il était „bon de les établir toutes deux directement.“

Soit le plan fixe

$$(\Pi_0) \quad Ax+By+Cz+Dt = 0,$$

et une surface conjuguée Σ quelconque

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2 = 0.$$

Un cône ayant son sommet en D, par exemple, et passant par la courbe d'intersection du plan Π_0 avec la surface Σ, aura pour équation

$$d(Ax+By+Cz)^2+D^2(ax^2+by^2+cz^2) = 0.$$

La seconde courbe plane d'intersection de ce cône avec la surface Σ sera déterminée par le plan

$$Ax+By+Cz-Dt = 0;$$

on le voit en retranchant de l'équation du cône celle de la surface multipliée par D^2.

Les quatre cônes ayant pour sommets ceux du tétraèdre $ABCD$ et pour directrice commune la courbe d'intersection du plan Π_0 avec la surface Σ, couperont cette surface suivant quatre courbes planes dont les plans seront

$$\begin{aligned}
B_2C_2D_2 \quad & -Ax+By+Cz+Dt = 0,\\
C_2D_2A_2 \quad & Ax-By+Cz+Dt = 0,\\
D_2A_2B_2 \quad & Ax+By-Cz+Dt = 0,\\
A_2B_2C_2 \quad & Ax+By+Cz-Dt = 0;
\end{aligned}$$

ces quatre plans sont fixes et forment un tétraèdre fixe $A_2B_2C_2D_2$, dont les sommets ont pour coordonnées

$$\begin{aligned}
A_2 \quad & -Ax = By = Cz = Dt,\\
B_2 \quad & Ax = -By = Cz = Dt,\\
C_2 \quad & Ax = By = -Cz = Dt,\\
D_2 \quad & Ax = By = Cz = -Dt.
\end{aligned}$$

Les faces du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ coupent les faces opposées du tétraèdre $ABCD$ suivant quatre droites situées dans le plan

$$(\Pi_0) \quad Ax+By+Cz+Dt = 0.$$

Les quatre droites AA_2, BB_2, CC_2, DD_2 passent par le point fixe

$$Ax = By = Cz = Dt.$$

Les sommets A_1, B_1, C_1, D_1 des cônes circonscrits à la surface Σ suivant les courbes d'intersection par les faces du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ ne sont autres que les pôles de ces plans par rapport à cette surface, leurs coordonnées seront donc

$$A_1 \quad \frac{-ax}{A} = \frac{by}{B} = \frac{cz}{C} = \frac{dt}{D},$$

$$B_1 \quad \frac{ax}{A} = \frac{-by}{B} = \frac{cz}{C} = \frac{dt}{D},$$

$$C_1 \quad \frac{ax}{A} = \frac{by}{B} = \frac{-cz}{C} = \frac{dt}{D},$$

$$D_1 \quad \frac{ax}{A} = \frac{by}{B} = \frac{cz}{C} = \frac{-dt}{D}.$$

Les faces du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$, savoir

$$B_1C_1D_1 \quad \frac{-ax}{A} + \frac{by}{B} + \frac{cz}{C} + \frac{dt}{D} = 0,$$

$$C_1D_1A_1 \quad \frac{ax}{A} - \frac{by}{B} + \frac{cz}{C} + \frac{dt}{D} = 0,$$

$$D_1A_1B_1 \quad \frac{ax}{A} + \frac{by}{B} - \frac{cz}{C} + \frac{dt}{D} = 0,$$

$$A_1B_1C_1 \quad \frac{ax}{A} + \frac{by}{B} + \frac{cz}{C} - \frac{dt}{D} = 0,$$

coupent les faces opposées du tétraèdre $ABCD$ suivant quatre droites situées dans le plan variable

$$\frac{ax}{A} + \frac{by}{B} + \frac{cz}{C} + \frac{dt}{D} = 0.$$

Les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 passent par le point

$$\frac{ax}{A} = \frac{by}{B} = \frac{cz}{C} = \frac{dt}{D},$$

pôle du plan Π_0.

Les autres propriétés énoncées dans le théorème III. s'établiront à l'aide des raisonnements et des formules déjà employés.

7. Je détacherai de cette analyse une propriété déjà renfermée dans le théorème III., mais qui me parait digne d'être énoncée séparément:

Théorème IV. *Si, par la courbe d'intersection d'un plan fixe et d'une surface conjuguée quelconque, on fait passer quatre cônes ayant pour sommets ceux du tétraèdre ABCD, les autres courbes d'intersection de ces quatre cônes avec la surface seront respectivement dans quatre plans fixes, quelle que soit la surface considérée.*

8. Théorème V. *Soit un point quelconque P_0 fixe dans l'espace; joignons ce point aux quatre sommets du tétraèdre ABCD, et soient A', A''; B', B''; C', C''; D', D'' les points où les droites P_0A, P_0B, P_0C, P_0D rencontrent une surface conjuguée quelconque. Si l'on considère un tétraèdre* ABCD *formé avec quatre quelconques de ces points, pourvu qu'il n'y en ait jamais deux situés à la fois sur une des droites issues du point P_0, les faces de ce tétraèdre rencontreront les faces opposées du tétraèdre ABCD suivant quatre droites situées dans un même plan, II. On pourra former ainsi seize tétraèdres.*

Si, aux points A, B, C, D, *on mène les plans tangents à la surface Σ, on formera un nouveau tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ dont les faces couperont les faces opposées du tétraèdre ABCD suivant quatre droites situées dans le plan polaire du point P_0 par rapport à la surface Σ.*

Les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, passeront par un même point qui est le pôle du plan II.

Ce théorème renferme, comme cas particulier, une partie du théorème I.

Soient x_0, y_0, z_0, t_0 le coordonnées du point P_0, et une surface conjuguée quelconque

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2 = 0.$$

Posons

$$\begin{cases} a_1 = \pm\sqrt{-\dfrac{by_0^2+cz_0^2+dt_0^2}{a}}, \\ b_1 = \pm\sqrt{-\dfrac{ax_0^2+cz_0^2+dt_0^2}{b}}, \\ c_1 = \pm\sqrt{-\dfrac{ax_0^2+by_0^2+dt_0^2}{c}}, \\ d_1 = \pm\sqrt{-\dfrac{ax_0^2+by_0^2+cz_0^2}{d}}; \end{cases}$$

les coordonnées des points d'intersection des droites P_0A, P_0B, P_0C, P_0D, avec la surface conjuguée seront données par les relations suivantes:

pour P_0A : A' ou A'' $\quad \dfrac{x}{a_1}=\dfrac{y}{y_0}=\dfrac{z}{z_0}=\dfrac{t}{t_0}$, A,

- P_0B : B' ou B'' $\quad \dfrac{x}{x_0}=\dfrac{y}{b_1}=\dfrac{z}{z_0}=\dfrac{t}{t_0}$, B,

- P_0C : C' ou C'' $\quad \dfrac{x}{x_0}=\dfrac{y}{y_0}=\dfrac{z}{c_1}=\dfrac{t}{t_0}$, C,

- P_0D : D' ou D'' $\quad \dfrac{x}{x_0}=\dfrac{y}{y_0}=\dfrac{z}{z_0}=\dfrac{t}{d_1}$, D.

Soit un tétraèdre ABCD, formé comme il a été indiqué dans l'énoncé, l'équation de la face BCD sera

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_0 & b_1 & z_0 & t_0 \\ x_0 & y_0 & c_1 & t_0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & d_1 \end{vmatrix} = 0;$$

l'intersection des faces BCD et *BCD* aura pour équations

$$x = 0,$$

$$\frac{y}{y_0 - b_1} + \frac{z}{z_0 - c_1} + \frac{t}{t_0 - d_1} = 0.$$

D'où il est facile de voir que les intersections des faces opposées des tétraèdres *ABCD* et ABCD sont situées dans le plan

$$(\Pi) \qquad \frac{x}{x_0 - a_1} + \frac{y}{y_0 - b_1} + \frac{z}{z_0 - c_1} + \frac{t}{t_0 - d_1} = 0.$$

Comme la démonstration a lieu quels que soient les signes, tout-à-fait indépendants, dont on affecte les radicaux a_1, b_1, c_1, d_1, il en résulte que la propriété énoncée subsiste pour les seize tétraèdres obtenus en faisant toutes les combinaisons possibles de ces signes.

Parmi les 120 intersections des 16 plans Π 2 à 2, il y en a quatre sur chacune des faces du tétraèdre *ABCD*.

Si, aux points A, B, C, D, on mène les plans tangents à la surface conjuguée, on forme seize nouveaux tétraèdres $A_1B_1C_1D_1$; les équations des faces seront

$$\begin{aligned}
B_1C_1D_1 \quad & aa_1x + by_0y + cz_0z + dt_0t = 0, \\
C_1D_1A_1 \quad & ax_0x + bb_1y + cz_0z + dt_0t = 0, \\
D_1A_1B_1 \quad & ax_0x + by_0y + cc_1z + dt_0t = 0, \\
A_1B_1C_1 \quad & ax_0x + by_0y + cz_0z + dd_1t = 0.
\end{aligned}$$

On voit que les faces du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ coupent les faces opposées du tétraèdre *ABCD* suivant quatre droites situées dans le plan

$$ax_0x + by_0y + cz_0z + dt_0t = 0;$$

c'est le plan polaire du point P_0 par rapport à la surface Σ.

Les équations des droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, sont

$$\begin{aligned}
AA_1 \quad & by(y_0 - b_1) = cz(z_0 - c_1) = dt(t_0 - d_1), \\
BB_1 \quad & ax(x_0 - a_1) = cz(z_0 - c_1) = dt(t_0 - d_1), \\
CC_1 \quad & ax(x_0 - a_1) = by(y_0 - b_1) = dt(t_0 - d_1), \\
DD_1 \quad & ax(x_0 - a_1) = by(y_0 - b_1) = cz(z_0 - c_1).
\end{aligned}$$

On constate alors que ces quatre droites passent par le point

$$(P) \qquad ax(x_0-a_1) = by(y_0-b_1) = cz(z_0-c_1) = dt(t_0-d_1),$$

qui est le pôle du plan Π.

9. Théorème VI. *Les arêtes du tétraèdre ABCD rencontrent une surface conjuguée quelconque en 12 points, par lesquels on peut mener quatre plans de manière que les trois points situés dans chaque plan appartiennent respectivement aux trois arêtes passant par un même sommet du tétraèdre; ces quatre plans forment un tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ dont les intersections par les faces opposées du tétraèdre ABCD sont dans un même plan Π. Les quatre droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 passent un même point P qui est le pôle du plan Π.*

En combinant les 12 points, comme il a été dit, on obtient 8 plans, lesquels donnent par leurs intersections deux à deux 28 droites; chaque face du tétraèdre contient quatre de ces droites.

Soit une surface conjuguée

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2 = 0,$$

on vérifie facilement que les quatre plans, obtenus par la construction ci-dessus indiquée, ont pour équations

$$\begin{array}{llllll}
\text{pour le sommet } (A) & x\sqrt{a}\sqrt{-1}+y\sqrt{b} & +z\sqrt{c} & +t\sqrt{d} & = 0,\\
- \quad - \quad - \quad (B) & x\sqrt{a} & +y\sqrt{b}\sqrt{-1}+z\sqrt{c} & +t\sqrt{d} & = 0,\\
- \quad - \quad - \quad (C) & x\sqrt{a} & +y\sqrt{b} & +z\sqrt{c}\sqrt{-1}+t\sqrt{d} & = 0,\\
- \quad - \quad - \quad (D) & x\sqrt{a} & +y\sqrt{b} & +z\sqrt{c} & +t\sqrt{d}\sqrt{-1} = 0;
\end{array}$$

les quatre radicaux $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ peuvent être affectés de signes arbitraires et indépendants, mais ces signes doivent être les mêmes dans les quatre équations. Or il est visible que les quatre droites, intersections respectives de ces plans avec les faces opposées du tétraèdre *ABCD*, sont dans le plan

$$(\Pi) \quad . \quad x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c}+t\sqrt{d} = 0.$$

En effectuant toutes les combinaisons possibles des signes des radicaux, on obtient huit systèmes de quatre droites, et par conséquent huit plans.

Si $A_1B_1C_1D_1$ est le tétraèdre formé par les quatre plans (A), (B), (C), (D), les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ont pour équations

$$\begin{aligned}
AA_1 \quad & y\sqrt{b} = z\sqrt{c} = t\sqrt{d},\\
BB_1 \quad & x\sqrt{a} = z\sqrt{c} = t\sqrt{d},\\
CC_1 \quad & x\sqrt{a} = y\sqrt{b} = t\sqrt{d},\\
DD_1 \quad & x\sqrt{a} = y\sqrt{b} = z\sqrt{c};
\end{aligned}$$

elles passent évidemment par le point

$$(P) \qquad x\sqrt{a} = y\sqrt{b} = z\sqrt{c} = t\sqrt{d},$$

pôle du plan Π.

Les plans Π sont les plans des courbes de contact des surfaces du second degré passant par les sommets du tétraèdre $ABCD$ et circonscrites à la surface conjuguée, comme on le voit par l'équation

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2-(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c}+t\sqrt{d})^2 = 0.$$

Il est à remarquer que ces plans ne sont réels que lorsque la surface conjuguée est imaginaire.

10. Nous allons signaler maintenant des propriétés d'un autre genre.

L'équation générale des surfaces conjuguées est, comme nous savons,

$$(17^a.) \qquad ax^2+by^2+cz^2+dt^2 = 0,$$

a, b, c, d étant complètement arbitraires.

Les coordonnées $(x_0 y_0 z_0 t_0)$ du pôle d'un plan fixe

$$(P) \qquad Ax+By+Cz+Dt = 0$$

seront données par les équations

$$(18^a.) \qquad \frac{ax_0}{A} = \frac{by_0}{B} = \frac{cz_0}{C} = \frac{dt_0}{D}.$$

Si nous tirons de ces relations les valeurs de a, b, c, d, pour les substituer dans l'équation (17.), nous avons

$$x^2 Ay_0 z_0 t_0 + y^2 Bx_0 z_0 t_0 + z^2 Cx_0 y_0 t_0 + t^2 Dx_0 y_0 z_0 = 0.$$

Or, si nous représentons par a_1, b_1, c_1, d_1 les distances des sommets du tétraèdre au plan fixe P, on a

$$(19.) \qquad \frac{A}{ma_1} = \frac{B}{nb_1} = \frac{C}{pc_1} = \frac{D}{qd_1},$$

m, n, p, q ayant les valeurs (4.). Il suffit, pour s'en assurer, d'avoir égard à la relation (2.) et de se rappeler que la distance d'un point à un plan est égale, à un facteur constant près, au premier membre de l'équation du plan. La relation précédente devient alors

$$a_1 x^2 (my_0 z_0 t_0) + b_1 y^2 (nx_0 z_0 t_0) + c_1 z^2 (px_0 y_0 t_0) + d_1 t^2 (qx_0 y_0 z_0) = 0.$$

Or le produit $(my_0 z_0 t_0)$ est égal (4.) à 6 fois le volume du tétraèdre formé par les trois longueurs $y_0 z_0 t_0$ menées normalement aux faces y, z, t, c. à d. ACD, ABD, ABC. Donc

Théorème VII. *Les quantités x, y, z, t représentant les distances d'un point quelconque d'une des surfaces conjuguées aux faces du tétraèdre $ABCD$; A_0, B_0, C_0, D_0 étant les pieds des perpendiculaires abaissées sur ces faces du pôle O d'un plan fixe, P, par rapport à cette surface; et enfin, a_1, b_1, c_1, d_1 étant les distances des sommets du tétraèdre au plan fixe P, la somme algébrique*

$$a_1 x^2 \operatorname{vol}(OB_0C_0D_0) + b_1 y^2 \operatorname{vol}(OA_0C_0D_0) + c_1 z^2 \operatorname{vol}(OA_0B_0D_0) + d_1 t^2 \operatorname{vol}(OA_0B_0C_0)$$

est constamment nulle, quelle que soit la surface considérée et quel que soit le point choisi sur cette surface.

11. Considérons le plan polaire d'un point fixe (x_1, y_1, z_1, t_1), c'est-à-dire

$$axx_1 + byy_1 + czz_1 + dtt_1 = 0;$$

remplaçons a, b, c, d par les valeurs déduites des relations (18.), puis transformons comme on vient de le faire, nous trouvons

$$a_1 xx_1 (my_0 z_0 t_0) + b_1 yy_1 (nx_0 z_0 t_0) + c_1 zz_1 (px_0 y_0 t_0) + d_1 tt_1 (qx_0 y_0 z_0);$$

d'où

Théorème VIII. *Les lettres a_1, b_1, c_1, d_1, A_0, B_0, C_0, D_0 ayant la même signification que dans le théorème précédent; en outre x_1, y_1, z_1, t_1 étant les distances d'un point fixe aux faces du tétraèdre $ABCD$, x, y, z, t étant les distances aux mêmes faces d'un point quelconque du plan polaire de ce point par rapport à une des surfaces conjuguées, la somme algébrique*

$$a_1 x_1 x \operatorname{vol}(OB_0C_0D_0) + b_1 y_1 y \operatorname{vol}(OA_0C_0D_0) + c_1 z_1 z \operatorname{vol}(OA_0B_0D_0) + d_1 t_1 t \operatorname{vol}(OA_0B_0C_0)$$

est constamment nulle, quelle que soit la surface considérée, et quelque soit le point choisi sur le plan polaire du point fixe par rapport à cette surface.

12. On constate sans difficulté les propriétés suivantes:

Théorème IX. *Les plans polaires d'un point quelconque situé sur une face du tétraèdre $ABCD$ passent par le sommet opposé, quelle que soit la surface conjuguée. Les plans polaires d'un point pris sur une arête passent par l'arête opposée. Les plans polaires d'un sommet coincident avec la face opposée, d'après la définition même.*

Remarque. Rappelons, une fois pour toutes, que les conditions imposées au pôle d'un plan fixe comprennent, comme cas particulier, les conditions semblables imposées au centre de la surface, puisque le centre est le pôle du plan à l'infini. Nous rappellerons encore qu'on obtient une surface dénuée de centre en assujetissant le centre à être sur le plan à l'infini.

§. 2.

13. Soit une surface conjuguée quelconque

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2 = 0,$$

et supposons qu'il existe entre les quantités $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ une relation homogène et de degré m, par exemple,

$$F\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right) = 0.$$

Le pôle d'un plan fixe

$$(P) \qquad Ax+By+Cz+Dt = 0$$

étant donné par les équations

$$(20.) \qquad \frac{ax}{A} = \frac{by}{B} = \frac{cz}{C} = \frac{dt}{D},$$

on voit que le lieu de ces pôles sera une surface ayant pour équation

$$F\left(\frac{x}{A}, \frac{y}{B}, \frac{z}{C}, \frac{t}{D}\right) = 0.$$

Donc

Théorème X. *Si entre les quantités* $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ *il existe une relation homogène et de degré m, le lieu des pôles d'un plan fixe* $(Ax+By+Cz+Dt=0)$ *par rapport à une surface conjuguée quelconque* $(ax^2+by^2+cz^2+dt^2=0)$ *sera une surface d'ordre m, qu'on obtiendra en remplaçant, dans la relation admise, les quantités* $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ *respectivement par* $\frac{x}{A}$, $\frac{y}{B}$, $\frac{z}{C}$, $\frac{t}{D}$.

De ce théorème général nous conclurons les propriétés particulières suivantes:

I. „Lorsque le pôle d'un plan fixe Q décrit un plan fixe Q_1, le pôle „d'un second plan fixe P décrira aussi un plan fixe P_1."

Car lorsqu'on assujétit le pôle d'un plan fixe

$$(Q) \qquad Mx+Ny+Pz+Qt = 0$$

à décrire un deuxième plan fixe

$$(Q_1) \qquad M_1x+N_1y+P_1z+Q_1t = 0,$$

on a la relation

$$(21.) \qquad \frac{MM_1}{a}+\frac{NN_1}{b}+\frac{PP_1}{c}+\frac{QQ_1}{d} = 0.$$

II. „Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit une surface conjuguée fixe, „le pôle d'un 2ième plan fixe décrira aussi une surface conjuguée également fixe."

En effet, lorsque le pôle d'un plan fixe

$$Mx+Ny+Pz+Qt = 0$$

décrit la surface conjuguée

$$M_1x^2+N_1y^2+P_1z^2+Q_1t^2 = 0,$$

on a la relation

$$(22.) \qquad \frac{M^2M_1}{a^2}+\frac{N^2N_1}{b^2}+\frac{P^2P_1}{c^2}+\frac{Q^2Q_1}{d^2} = 0.$$

III. „Lorsque les surfaces conjuguées sont tangentes à un des hyper-„boloïdes H n° [2, II.], le pôle d'un plan fixe décrit un hyperboloïde circonscrit „au même quadrilatère."

Car, lorsque les surfaces conjuguées touchent l'hyperboloïde

$$\lambda yz+tx = 0,$$

on a la relation n° [2, II.]

$$(23.) \qquad \frac{\lambda^2}{bc} = \frac{1}{ad}.$$

IV. „Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit un *cône conjugué*, le pôle „d'un 2ième plan fixe décrira un cône conjugué ayant même sommet que le „premier."

En effet, lorsque le pôle d'un plan fixe

$$(Q) \qquad Mx+Ny+Pz+Qt = 0$$

décrit le cône conjugué n° [2, III.]

$$\lambda x^2+\mu y^2+\nu z^2 = 0,$$

par exemple, on a la relation

$$(24.) \qquad \frac{\lambda M^2}{a^2}+\frac{\mu N^2}{b^2}+\frac{\nu P^2}{c^2} = 0.$$

V. „Lorsque le pôle d'un plan fixe est assujéti à décrire un *cône* „*circonscrit* à un des trièdres du tétraèdre, le pôle d'un plan fixe décrit un „cône circonscrit au même trièdre."

Car, le pôle d'un plan fixe Q décrivant le cône circonscrit

$$\lambda yz+\mu xz+\nu xy = 0$$

on a la relation

$$(25.) \qquad \frac{\lambda}{M}\frac{1}{bc}+\frac{\mu}{N}\frac{1}{ac}+\frac{\nu}{P}\frac{1}{ab} = 0.$$

VI. „Lorsque le pôle d'un plan fixe est assujéti à se mouvoir sur „un *cône inscrit*, le pôle d'un plan fixe décrit un cône également inscrit au „même trièdre."

Car, le pôle d'un plan fixe Q décrivant le cône inscrit

$$\sqrt{\lambda x}+\sqrt{\mu y}+\sqrt{\nu z} = 0$$

on a la relation

$$(26.) \quad \sqrt{\frac{\lambda M}{a}}+\sqrt{\frac{\mu N}{b}}+\sqrt{\frac{\nu P}{c}} = 0.$$

VII. „Lorsque les surfaces conjuguées sont tangentes à un *cône inscrit*, „le lieu des pôles d'un plan fixe est un cône du 3ième ordre ayant même „sommet que le cône inscrit; la base du cône sur la face opposée est une „courbe du 3ième ordre ayant pour tangentes réelles d'inflexion les côtés du „triangle qui forme cette face."

En effet, les surfaces conjuguées étant tangentes au cône inscrit

$$\sqrt{\lambda x}+\sqrt{\mu y}+\sqrt{\nu z} = 0,$$

par exemple, on a la relation n° [2, V.]

$$(27.) \quad \sqrt[3]{\frac{\lambda^2}{a}}+\sqrt[3]{\frac{\mu^2}{b}}+\sqrt[3]{\frac{\nu^2}{c}} = 0;$$

et l'équation du lieu des pôles d'un plan fixe sera

$$(28.) \quad \sqrt[3]{\frac{\lambda^2 x}{A}}+\sqrt[3]{\frac{\mu^2 y}{B}}+\sqrt[3]{\frac{\nu^2 z}{C}} = 0;$$

équation qui peut être mise sous la forme

$$(28\,\text{bis}) \quad \left(\frac{\lambda^2 x}{A}+\frac{\mu^2 y}{B}+\frac{\nu^2 z}{C}\right)^3 = 27\,\frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{ABC}xyz.$$

VIII. „Lorsque les surfaces conjuguées sont tangentes à un *cône „circonscrit*, le lieu des pôles d'un plan fixe est un cône du 6ième ordre cir- „conscrit au même trièdre; les arêtes du trièdre sont des arêtes triples de ce „cône; les trois plans tangents en chacune de ces arêtes triples coincident, et „coupent les faces opposées suivant trois droites situées dans un même plan."

En effet, les surfaces conjuguées étant tangentes au cône circonscrit

$$\lambda yz+\mu xz+\nu xy = 0,$$

par exemple, on a la relation n° [2, IV.]

$$(29.) \quad \sqrt[3]{\frac{\lambda^2}{bc}}+\sqrt[3]{\frac{\mu^2}{ac}}+\sqrt[3]{\frac{\nu^2}{ab}} = 0;$$

et l'équation du lieu des pôles d'un plan fixe sera

$$(30.) \quad \sqrt[3]{\frac{\lambda^2 yz}{BC}}+\sqrt[3]{\frac{\mu^2 xz}{AC}}+\sqrt[3]{\frac{\nu^2 xy}{AB}} = 0;$$

équation qui pourra s'écrire:

$$(30\text{bis}) \qquad \left(\frac{\lambda^2 yz}{BC}+\frac{\mu^2 xz}{AC}+\frac{\nu^2 xy}{AB}\right)^3 = 27\,\frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{A^2B^2C^2}\,x^2y^2z^2.$$

IX. „Lorsque les surfaces conjuguées sont tangentes à une droite „fixe, le lieu des pôles d'un plan fixe est une surface du second ordre cir- „conscrite au tétraèdre *ABCD*."

Si nous désignons par (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) les coordonnées de deux points fixes, on trouve que la condition, pour que les surfaces conjuguées

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2 = 0$$

soient tangentes à la droite passant par ces deux points, est la suivante

$$(31.) \qquad \frac{A_{12}^2}{ab}+\frac{A_{13}^2}{ac}+\frac{A_{14}^2}{ad}+\frac{A_{23}^2}{bc}+\frac{A_{24}^2}{bd}+\frac{A_{34}^2}{cd} = 0;$$

dans cette relation nous avons posé

$$(31\,\text{bis}) \qquad \begin{cases} A_{12} = z_1t_2-z_2t_1, & A_{23} = x_1t_2-x_2t_1, \\ A_{13} = y_1t_2-y_2t_1, & A_{24} = x_1z_2-x_2z_1, \\ A_{14} = y_1z_2-y_2z_1, & A_{34} = x_1y_2-x_2y_1. \end{cases}$$

Le lieu des pôles d'un plan fixe sera donc

$$\frac{A_{12}^2}{AB}xy+\frac{A_{13}^2}{AC}xz+\frac{A_{14}^2}{AD}xt+\frac{A_{23}^2}{BC}yz+\frac{A_{24}^2}{BD}yt+\frac{A_{34}^2}{CD}zt = 0.$$

14. Considérons toujours une surface conjuguée quelconque

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2 = 0,$$

et supposons qu'il existe entre les quantités a, b, c, d une relation homogène et de degré m, par exemple

$$F(a, b, c, d) = 0.$$

Cherchons le lieu des points de contact des plans passant par une droite fixe et tangents aux surfaces conjuguées.

Soient (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) les coordonnées de deux points fixes qui déterminent la droite, et (x, y, z, t) les coordonnées du point de contact d'un plan tangent passant par cette droite; on obtiendra le lieu cherché en éliminant a, b, c, d entre l'équation

$$F(a, b, c, d) = 0$$

et les suivantes

$$\begin{cases} ax^2+by^2+cz^2+dt^2 = 0, \\ ax_1x+by_1y+cz_1z+dt_1t = 0, \\ ax_2x+by_2y+cz_2z+dt_2t = 0. \end{cases}$$

Or posons

$$(32.)\quad \begin{cases} \Delta_1 = \begin{vmatrix} y & z & t \\ y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = -\begin{vmatrix} x & z & t \\ x_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & z_2 & t_2 \end{vmatrix}, \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \end{cases}$$

ces expressions, égalées à zéro, donnent *quatre plans passant respectivement par la droite fixe et les sommets du tétraèdre ABCD.*

On trouve alors

$$(33.)\quad \frac{ax}{\Delta_1} = \frac{by}{\Delta_2} = \frac{cz}{\Delta_3} = \frac{dt}{\Delta_4};$$

et le lieu des points de contact sera

$$F\left(\frac{\Delta_1}{x}, \frac{\Delta_2}{y}, \frac{\Delta_3}{z}, \frac{\Delta_4}{t}\right) = 0.$$

D'où:

Théorème XI. *S'il existe entre les quantités a, b, c, d une relation homogène et de degré m, le lieu des points de contact des plans, passant par la droite fixe* $(x_1, y_1, z_1, t_1)(x_2, y_2, z_2, t_2)$ *et tangents aux surfaces conjuguées, sera une surface de l'ordre* $4m$, *au plus. On obtiendra son équation en remplaçant, dans la relation admise, les quantités a, b, c, d respectivement par* $\frac{\Delta_1}{x}, \frac{\Delta_2}{y}, \frac{\Delta_3}{z}, \frac{\Delta_4}{t}$; *les lettres* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ *représentent des fonctions linéaires définies par les égalités* (32.).

De ce théorème général nous conclurons encore les propriétés particulières suivantes.

X. „Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit un plan fixe, le lieu des „points de contact des plans tangents, menés aux surfaces conjuguées par une „droite fixe, est une surface du $4^{\text{ième}}$ ordre; cette surface passe par la droite „fixe et par les intersections avec les faces opposées du tétraèdre *ABCD* des „plans menés suivant la droite fixe et les sommets de ce tétraèdre."

Car, lorsqu'on assujétit le pôle d'un plan fixe à décrire un deuxième plan fixe, on a la relation (21.)

$$\frac{MM_1}{a} + \frac{NN_1}{b} + \frac{PP_1}{c} + \frac{QQ_1}{d} = 0;$$

et par suite l'équation du lieu est

$$(34.) \qquad \frac{MM_1x}{\Delta_1}+\frac{NN_1y}{\Delta_2}+\frac{PP_1z}{\Delta_3}+\frac{QQ_1t}{\Delta_4}=0.$$

XI. „Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit une surface conjuguée „fixe, le lieu des points de contact des plans tangents, menés aux surfaces „conjuguées par une droite fixe, est une surface du 8ième ordre; cette sur- „face passe par la droite fixe et par les intersections des plans Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 „avec les faces opposées du tétraèdre *ABCD;* en outre, ces plans touchent „la surface suivant les deux droites qu'ils contiennent respectivement."

Le pôle d'un plan fixe étant assujéti à décrire une surface conjuguée, on a la relation (22.)

$$\frac{M^2M_1}{a^2}+\frac{N^2N_1}{b^2}+\frac{P^2P_1}{c^2}+\frac{Q^2Q_1}{d^2}=0,$$

et l'équation du lieu est alors

$$(35.) \qquad M^2M_1\frac{x^2}{\Delta_1^2}+N^2N_1\frac{y^2}{\Delta_2^2}+P^2P_1\frac{z^2}{\Delta_3^2}+Q^2Q_1\frac{t^2}{\Delta_4^2}=0.$$

XII. „Lorsque les surfaces conjuguées sont tangentes à un des hyper- „boloïdes H n° (2), le lieu des points de contact des plans tangents menés „par une droite fixe est une surface du 4ième ordre; cette surface passe par „le même quadrilatère gauche que l'hyperboloïde considéré et par 12 autres „droites fixes."

Les surfaces conjuguées touchant un des hyperboloides H, on a la relation (23.)

$$\lambda^2 ad = bc;$$

et par suite l'équation du lieu sera

$$(36.) \qquad \lambda^2 yz\Delta_1\Delta_4 = xt\Delta_2\Delta_3.$$

On voit que cette surface (36.) passe par les seize droites intersections respectives des quatre plans

$$y=0, \qquad z=0, \qquad \Delta_1=0, \qquad \Delta_4=0$$

avec chacun des quatre plans

$$x=0, \qquad t=0, \qquad \Delta_2=0, \qquad \Delta_3=0.$$

XIII. „Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit un cône conjugué, le „lieu des points de contact avec les surfaces conjuguées des plans tangents „menés par une droite fixe est une surface du 6ième ordre."

Dans le cas actuel, on a la relation (24.)

$$\frac{\lambda M^2}{a^2}+\frac{\mu N^2}{b^2}+\frac{\nu P^2}{c^2}=0,$$

et l'équation du lieu sera

$$\lambda M^2\frac{x^2}{\Delta_1^2}+\mu N^2\frac{y^2}{\Delta_2^2}+\nu P^2\frac{z^2}{\Delta_3^2}=0.$$

Les propriétés sont analogues à celles de la surface rencontrée dans la proposition XI.

XIV. „Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit un cône circonscrit, le „lieu des points de contact est une surface du 3ième ordre circonscrite au même „trièdre, passant par la droite fixe et par les intersections des plans Δ_1, Δ_2, Δ_3. „avec les faces opposées du trièdre."

En effet, on a dans ce cas la relation (25.)

$$\frac{\lambda}{M}a+\frac{\mu}{M}b+\frac{\nu}{P}c=0,$$

et pour équation du lieu

$$(37.)\qquad \frac{\lambda}{M}yz\Delta_1+\frac{\mu}{N}xz\Delta_2+\frac{\nu}{P}xy\Delta_3=0.$$

XV. „Lorsque les surfaces conjuguées sont tangentes à une droite fixe, „le lieu des points de contact est une surface du quatrième ordre passant par „la droite fixe et par les sommets du tétraèdre formé par les quatre plans „Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 et par ceux du tétraèdre $ABCD$."

On a dans ce cas la relation (31.); d'où l'on déduit pour l'équation du lieu

$$A_{12}^2xy\Delta_3\Delta_4+A_{13}^2xz\Delta_2\Delta_4+A_{14}^2xt\Delta_2\Delta_3+A_{23}^2yz\Delta_1\Delta_4+A_{24}^2yt\Delta_1\Delta_3+A_{34}^2zt\Delta_1\Delta_2=0.$$

XVI. „Lorsque les surfaces conjuguées passent par un point fixe, le „lieu des points de contact est une surface du 4ième ordre, laquelle passe par „la droite fixe, les arêtes du tétraèdre $ABCD$, et les intersections des plans „Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 avec les faces opposées de ce tétraèdre."

Les surfaces conjuguées devant passer par un point fixe (x_0, y_0, z_0, t_0) on a la relation

$$ax_0^2+by_0^2+cz_0^2+dt_0^2=0;$$

l'équation du lieu est alors:

$$(38.)\qquad x_0^2yzt\Delta_1+y_0^2xzt\Delta_2+z_0^2xyt\Delta_3+t_0^2xyz\Delta_4=0.$$

15. Supposons qu'entre trois des paramètres de l'équation d'une surface conjuguée

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2=0,$$

on ait une relation homogène, telle que

$$(39.) \qquad F(a, b, c) = 0;$$

cherchons l'enveloppe des plans polaires d'un point fixe situé dans la face $t = 0$, c. à d. la face dont l'équation est donnée en égalant à zéro la variable correspondante au paramètre qui manque dans la relation (39.).

Le plan polaire d'un point fixe $(x_0, y_0, z_0, t = 0)$, situé dans la face $t = 0$, a pour équation

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = 0;$$

l'enveloppe de ces plans sera fournie par l'élimination de a, b, c entre les équations

$$(40.) \qquad \begin{cases} ax_0x + by_0y + cz_0z = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial a} : \dfrac{\partial F}{\partial b} : \dfrac{\partial F}{\partial c} = x x_0 : y y_0 : z z_0; \end{cases}$$

l'équation résultante en x, y, z sera du degré $m(m-1)$. Ainsi

Théorème XII. *Lorsqu'entre trois des coefficients de l'équation d'une surface conjuguée il existe une relation homogène et de degré m, l'enveloppe des plans polaires d'un point fixe, situé sur la face obtenue en égalant à zéro la variable correspondant au coefficient qui n'entre pas dans la relation, est un cône d'ordre $m(m-1)$, en général; ce cône a pour sommet le sommet du tétraèdre opposé à la face considérée.*

Je signalerai les cas particuliers qui suivent.

XVII. „Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit un plan passant par un „sommet du tétraèdre D par exemple, ou bien lorsque le pôle d'un plan fixe „passant par un sommet D du tétraèdre décrit un plan fixe quelconque, les „plans polaires d'un point fixe, situé sur la face opposée à ce sommet, en„veloppent un cône du second degré ayant son sommet en D et inscrit dans „le trièdre D."

En effet, si le pôle d'un plan fixe décrit un plan passant par le sommet D, ou si le pôle d'un plan passant par ce même sommet décrit un plan fixe quelconque, on a la relation

$$\frac{MM_1}{a} + \frac{NN_1}{b} + \frac{PP_1}{c} = 0;$$

on trouve alors pour l'enveloppe des plans polaires d'un point fixe, situé dans le plan $t = 0$, l'équation

$$\sqrt{MM_1 x_0 x} + \sqrt{NN_1 y_0 y} + \sqrt{PP_1 z_0 z} = 0.$$

XVIII. „Lorsque le pôle d'un plan fixe passant par un des sommets „du tétraèdre décrit une surface conjuguée, les plans polaires d'un point fixe, „situé sur la face opposée, enveloppent un cône du 6ième ordre."

Le pôle d'un plan fixe, passant par le sommet D par exemple, décrivant une surface conjuguée, on a la relation

$$\frac{M^2M_1}{a^2}+\frac{N^2N_1}{b^2}+\frac{P^2P_1}{c^2}=0;$$

l'enveloppe des plans polaires d'un point situé sur la face opposée $t=0$ sera

$$(41.)\qquad \sqrt[3]{M^2M_1x_0^2x^2}+\sqrt[3]{N^2N_1y_0^2y^2}+\sqrt[3]{P^2P_1z_0^2z^2}=0;$$

ou bien

$$(41\text{ bis})\quad (M^2M_1x_0^2x^2+N^2N_1y_0^2y^2+P^2P_1z_0^2z^2)^3=27M^2N^2P^2M_1N_1P_1x_0^2y_0^2z_0^2x^2y^2z^2.$$

Les intersections de ce cône avec le cône conjugué

$$M^2M_1x_0^2x^2+N^2N_1y_0^2y^2+P^2P_1z_0^2z^2=0$$

en sont des arêtes doubles; les faces du trièdre D sont respectivement des plans tangents suivant les deux arêtes qu'elles contiennent.

XIX. „Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit un cône circonscrit, les „plans polaires d'un point fixe quelconque passent tous par un point fixe situé „sur la face opposée au sommet du cône."

Dans ce cas, on a la relation (25.)

$$\frac{\lambda}{M}a+\frac{\mu}{N}b+\frac{\nu}{P}c=0;$$

et, il est visible que les plans polaires

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=0$$

passent par le point fixe:

$$t=0,\qquad \frac{Mx_0x}{\lambda}=\frac{Ny_0y}{\mu}=\frac{Pz_0z}{\nu}.$$

XX. „Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit un cône inscrit, l'enveloppe „des plans polaires d'un point fixe, situé dans la face opposée au sommet du „cône, est un cône du 3ième ordre."

Le pôle d'un plan fixe décrivant un cône inscrit, on a la relation (26.)

$$\sqrt{\frac{\lambda M}{a}}+\sqrt{\frac{\mu N}{b}}+\sqrt{\frac{\nu P}{c}}=0;$$

l'enveloppe des plans polaires d'un point, situé dans la face $t=0$, sera

$$(42.)\qquad \sqrt[3]{\lambda Mx_0x}+\sqrt[3]{\mu Ny_0y}+\sqrt[3]{\nu Pz_0z}=0.$$

Ce cône a une équation identique avec celle du cône (28.), VII. Le rapprochement de ces deux résultats conduit à une conséquence curieuse; nous en rencontrerons d'autres du même genre.

XXI. „Lorsque les surfaces conjuguées sont tangentes à un cône „circonscrit, l'enveloppe des plans polaires d'un point fixe, situé sur la face „opposée au sommet du cône, est un cône du 6ième ordre."

On a, dans le cas actuel, la relation (29.)

$$\sqrt[3]{\lambda^2 a}+\sqrt[3]{\mu^2 b}+\sqrt[3]{\nu^2 c}=0;$$

et l'enveloppe des plans polaires d'un point fixe, situé dans la face $t=0$, sera

$$(43.)\qquad \lambda\sqrt[3]{y_0 z_0 yz}+\mu\sqrt[3]{x_0 z_0 xz}+\sqrt[3]{x_0 y_0 xy}=0.$$

Ce cône a une équation identique avec celle du cône (30.) VIII.

XXII. „Lorsque les surfaces conjuguées sont tangentes à un cône in„scrit, les plans polaires d'un point fixe, situé sur la face opposée au sommet „du cône, enveloppent un cône du 4ième ordre tangent aux trois faces du „trièdre considéré."

Les surfaces conjuguées étant tangentes à un cône inscrit, on a la relation (27.)

$$\sqrt[3]{\frac{\lambda^2}{a}}+\sqrt[3]{\frac{\mu^2}{b}}+\sqrt[3]{\frac{\nu^2}{c}}=0;$$

l'enveloppe des plans polaires d'un point fixe, situé sur la face $t=0$, sera

$$(44.)\qquad \sqrt[4]{\lambda^2 x_0 x}+\sqrt[4]{\mu^2 y_0 y}+\sqrt[4]{\nu^2 z_0 z}=0;$$

équation qui peut s'écrire

$$(44\,\text{bis})\quad \begin{cases}(\lambda^4 x_0^2 x^2+\mu^4 y_0^2 y^2+\nu^4 z_0^2 z^2-2\lambda^2\mu^2 x_0 y_0 xy-2\lambda^2\nu^2 x_0 z_0 xz-2\mu^2\nu^2 y_0 z_0 yz)^2\\ \qquad=32\lambda^2\mu^2\nu^2 x_0 y_0 z_0 xyz(\lambda^2 x\ x+\mu^2 y_0 y+\nu^2 z_0 z).\end{cases}$$

C'est un cône du 4ième ordre tangent aux faces du trièdre D et au plan

$$\lambda^2 x_0 x+\mu^2 y_0 y+\nu^2 z_0 z=0;$$

les arêtes de contact sont sur un cône du second degré inscrit dans le même trièdre.

Remarque. Dans ce second paragraphe, je me suis contenté de donner les énoncés relatifs aux cas généraux; mais les droites fixes, les plans fixes, peuvent affecter des positions particulières; les lieux géométriques trouvés présentent alors des réductions très remarquables. Cette discussion n'offre aucune difficulté, et j'ai dû la laisser de côté pour ne pas donner à ce mémoire une trop grande étendue.

§. 3.

16. Théorème XIII. *Lorsque le pôle d'un plan fixe est assujéti à se mouvoir sur un second plan fixe, les surfaces conjuguées restent constamment tangentes à huit plans fixes.*

La condition imposée entraine la relation

$$\frac{MM_1}{a}+\frac{NN_1}{b}+\frac{PP_1}{c}+\frac{QQ_1}{d}=0.$$

Or, rappelons-nous qu'un plan

$$Ax+By+Cz+Dt=0$$

est tangent aux surfaces conjuguées lorsque

$$\frac{A^2}{a}+\frac{B^2}{b}+\frac{C^2}{c}+\frac{D^2}{d}=0;$$

on voit alors que la première relation exprime que les huit plans fixes

$$(45.)\qquad x\sqrt{MM_1}\pm y\sqrt{NN_1}\pm z\sqrt{PP_1}\pm t\sqrt{QQ_1}=0$$

sont tangents aux surfaces conjuguées.

N.B. En supposant que le second plan coincide avec le premier, on assujétirait les surfaces conjuguées à toucher un plan fixe.

17. Théorème XIV. *Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit un hyperboloïde circonscrit à un des quadrilatères formés par le tétraèdre ABCD, les surfaces conjuguées sont constamment tangentes à deux hyperboloïdes fixes circonscrits au même quadrilatère.*

Car le pôle d'un plan fixe

$$Ax+By+Cx+Dt=0$$

décrivant l'hyperboloide n° 2, II.

$$\lambda yz+tx=0,$$

on a la relation

$$(46.)\qquad \lambda\frac{BC}{AD}ad+bc=0.$$

Or cette relation exprime que les surfaces conjuguées touchent les deux hyperboloïdes n° 2, II.

$$\pm\sqrt{-\frac{\lambda BC}{AD}}yz+tx=0.$$

18. Théorème XV. *Lorsque le pôle d'un plan fixe est assujéti à décrire un cône circonscrit à un des trièdres du tétraèdre ABCD, les surfaces conjuguées passent par huit points fixes situés dans la face opposée au sommet du cône.*

L'équation du cône circonscrit au trièdre D, par exemple, étant

$$\lambda yz + \mu xz + \nu xy = 0,$$

nous aurons la relation

$$\frac{\lambda a}{A} + \frac{\mu b}{B} + \frac{\nu c}{C} = 0.$$

On voit alors que les surfaces conjuguées passent par les points fixes

$$t = 0, \qquad \frac{Ax^2}{\lambda} = \frac{By^2}{\mu} = \frac{Cz^2}{\nu}.$$

19. Théorème XVI. *Lorsque les surfaces conjuguées passent par un point fixe, les plans polaires d'un point fixe passent eux-mêmes par un point fixe.*

On a en effet la condition (x_0, y_0, z_0, t_0 étant le point fixe)

$$(47.) \qquad ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 + dt_0^2 = 0;$$

on voit alors que les plans polaires

$$ax_1x + by_1y + cz_1z + dt_1t = 0$$

d'un point fixe (x_1, y_1, z_1, t_1) passent par le point fixe

$$\frac{x_1x}{x_0^2} = \frac{y_1y}{y_0^2} = \frac{z_1z}{z_0^2} = \frac{t_1t}{t_0^2}.$$

20. Théorème XVII. *Lorsque les surfaces conjuguées passent par un point fixe, le pôle d'un plan fixe décrit une surface du 3ième ordre passant par les arêtes du tétraèdre ABCD; les sommets du tétraèdre sont des points doubles de la surface.*

D'après la relation (47.) le lieu des pôles d'un plan fixe sera, en effet,

$$(48.) \qquad Ax_0^2yzt + By_0^2xzt + Cz_0^2xyt + Dt_0^2xyz = 0.$$

21. Théorème XVIII. *Lorsque les surfaces conjuguées passent par deux points fixes, elles passent toutes par les points communs à deux cônes du second degré, conjugués du tétraèdre ABCD et passant par les deux points fixes.*

La propriété est visible lorsqu'on a écrit les deux conditions imposées.

22. Théorème XIX. *Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit un second plan fixe, le lieu des points de contact des surfaces conjuguées avec*

les hyperboloïdes circonscrits à l'un des quadrilatères gauches du tétraèdre ABCD est une surface du second degré fixe conjuguée du même tétraèdre.

Les coordonnées du point de contact de la surface conjuguée

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2 = 0$$

avec l'hyperboloide

$$\lambda yz+xt = 0$$

sont données par les équations

$$(49.) \qquad ax^2-dt^2=0, \quad by^2-cz^2=0, \quad ax^2+by^2=0.$$

Si l'on tient compte de la relation imposée

$$\frac{MM_1}{a}+\frac{NN_1}{b}+\frac{PP_1}{c}+\frac{QQ_1}{d} = 0,$$

le lieu de ces points sera

$$MM_1x^2-NN_1y^2-PP_1z^2+QQ_1t^2 = 0;$$

remarquons que cette surface reste fixe quelque soit l'hyperboloïde circonscrit au même quadrilatère.

23. Théorème XX. *Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit un second plan fixe passant par un des sommets du tétraèdre ABCD, les points de contact des surfaces conjuguées avec un cône fixe circonscrit au trièdre correspondant sont sur une courbe du 3ième ordre située sur la face opposée.*

Les coordonnées du point de contact de la surface conjuguée avec le cône circonscrit

$$\lambda yz+\mu xz+\nu xy = 0$$

sont données n° [2, IV.] par les équations

$$\frac{ax^3}{\lambda}=\frac{by^3}{\mu}=\frac{cz^3}{\nu}, \qquad t=0.$$

Or la condition imposée est

$$\frac{MM_1}{a}+\frac{NN_1}{b}+\frac{PP_1}{c} = 0;$$

le lieu des points de contact sera donc la courbe

$$\begin{cases} \dfrac{MM_1}{\lambda}x^3+\dfrac{NN_1}{\mu}y^3+\dfrac{PP_1}{\nu}z^3 = 0, \\ t=0. \end{cases}$$

Les neuf points d'inflexion (réels et imaginaires) de cette courbe du troisième degré sont sur le triangle $ABC=0$.

24. Théorème XXI. *Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit l'intersection de deux cônes circonscrits, les surfaces conjuguées passent par l'intersection de deux cônes conjugués ayant mêmes sommets que les premiers. — Les plans polaires d'un point fixe passent par une droite fixe.*

Le plan fixe étant

$$Ax+By+Cz+Dt = 0,$$

et les deux cônes circonscrits ayant pour équations

$$\begin{cases} \lambda yz+\mu xz+\nu xy = 0, \\ lxt+myt+nxy = 0, \end{cases}$$

on a les deux conditions

$$(50.) \qquad \begin{cases} \lambda BCa+\mu ACb+\nu ABc = 0, \\ lADb+mBDa+nABd = 0. \end{cases}$$

On voit, d'après cela, que les surfaces conjuguées

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2 = 0$$

passeront par l'intersection de deux cônes conjugués; et que les plans polaires du point fixe x_0, y_0, z_0, t_0

$$ax_0x+by_0y+cz_0z+dt_0t = 0$$

passeront par une droite fixe.

25. Théorème XXII. *Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit une droite fixe, les surfaces conjuguées enveloppent une surface du 8ième ordre.*

Si (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) sont les coordonnées de deux points fixes déterminant la droite donnée, les coordonnées d'un point quelconque de la droite devront vérifier les relations

$$(51.) \qquad \frac{x}{x_1+\lambda x_2} = \frac{y}{y_1+\lambda y_2} = \frac{z}{z_1+\lambda z_2} = \frac{t}{t_1+\lambda t_2},$$

où λ est une constante arbitraire.

Le pôle d'un plan fixe

$$Ax+By+Cz+Dt = 0$$

étant défini par les équations

$$\frac{ax}{A} = \frac{by}{B} = \frac{cz}{C} = \frac{dt}{D},$$

nous aurons les relations

$$\frac{A}{a(x_1+\lambda x_2)} = \frac{B}{b(y_1+\lambda y_2)} = \frac{C}{c(z_1+\lambda z_1)} = \frac{D}{d(t_1+\lambda t_2)}.$$

L'équation des surfaces conjuguées pourra dès-lors s'écrire sous la forme

$$(52.) \qquad \frac{Ax^2}{x_1+\lambda x_2}+\frac{By^2}{y_1+\lambda y_2}+\frac{Cz^2}{z_1+\lambda z_2}+\frac{Dt^2}{t_1+\lambda t_2} = 0;$$

dans cette équation λ est une constante arbitraire.

En chassant les dénominateurs on obtiendra l'équation suivante

$$M\lambda^3+N\lambda^2+P\lambda+Q = 0,$$

dans laquelle M, N, P, Q sont des fonctions de la forme

$$mx^2+m_1y^2+m_2z^2+m_3t^2;$$

et l'enveloppe des surfaces (52.) sera

$$(53.) \qquad (9MQ-NP)^2 = 4(N^2-3MP)(P^2-3NQ).$$

C'est une surface du 8ième ordre, dont plusieurs propriétés curieuses sont mises en évidence par la forme même de l'équation.

26. Théorème XXIII. *Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit une droite fixe, les plans polaires d'un point fixe enveloppent une surface du quatrième ordre.*

L'équation du plan polaire d'un point fixe (x_0, y_0, z_0, t_0) étant

$$ax_0x+by_0y+cz_0z+dt_0t = 0,$$

on voit que le résultat cherché se déduira du précédent en y remplaçant x^2, y^2, z^2, t^2, respectivement par x_0x, y_0y, z_0z, t_0t.

On trouve ainsi une surface du 4ième ordre dont les propriétés les plus saillantes seront indiquées par la forme même de l'équation obtenue.

27. Theorème XXIV. „Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit un „plan fixe, les plans polaires d'un point fixe enveloppent la surface

$$(53^a.) \qquad \sqrt{MM_1x_1x}+\sqrt{NN_1y_1y}+\sqrt{PP_1z_1z}+\sqrt{QQ_1z_1z} = 0;$$

x_1, y_1, z_1, t_1 sont les coordonnées du point fixe. On arrive à cette équation par les méthodes connues en partant de la relation (21.).

28. Théorème XXV. „Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit un „des hyperboloides H n° 2., ou lorsque les surfaces conjuguées sont tangentes „à cet hyperboloide, les plans polaires d'un point fixe enveloppent la surface

$$\lambda\frac{BC}{AD}y_1z_1yz+x_1t_1xt = 0;$$

on part de la relation (46.).

29. Théorème XXVI. „Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit une „surface conjuguée fixe, les surfaces conjuguées enveloppent la surface

$$(54.) \qquad \sqrt[3]{M^2M_1x^4}+\sqrt[3]{N^2N_1y^4}+\sqrt[3]{P^2P_1z^4}+\sqrt[3]{Q^2Q_1t^4} = 0;$$

„et les plans polaires d'un point fixe enveloppent la surface

$$(55.) \qquad \sqrt[3]{M^2M_1x_1^2x^2}+\sqrt[3]{N^2N_1y_1^2y^2}+\sqrt[3]{P^2P_1z_1^2z^2}+\sqrt[3]{Q^2Q_1t_1^2t^2} = 0;$$

on part de la relation (22.).

On retrouve, comme cas particulier, le n° XVIII. du théorème XII.

30. Théorème XXVII. „Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit un „cône inscrit, les surfaces conjuguées enveloppent la surface

$$(56.) \qquad \sqrt[3]{\lambda M x^2} + \sqrt[3]{\mu N y^2} + \sqrt[3]{\nu P z^2} = 0,$$

„et les plans polaires d'un point fixe enveloppent la surface

$$(57.) \qquad \sqrt[3]{\lambda M x_1 x} + \sqrt[3]{\mu N y_1 y} + \sqrt[3]{\nu P z_1 z} = 0;$$

le point de départ est la relation (26.).

On a comme cas particulier le n° XX. du théorème XII.

31. Théorème XXVIII. „Lorsque les surfaces conjuguées sont assu- „jetties à toucher un cône circonscrit, ou un cône inscrit, on trouve, pour „enveloppe des plans polaires d'un point fixe quelconque, les surfaces déjà ob- „tenues dans les n°s XXI. et XXII. du théorème XII., c. à d. les surfaces „(43.) et (44.)".

On voit que ces surfaces restent les mêmes quelle que soit la position du point sur une certaine droite fixe passant par le sommet du cône.

32. Théorème XXIX. *Lorsque les surfaces conjuguées touchent une droite fixe, les plans polaires d'un point fixe enveloppent une surface du second degré; les surfaces conjuguées enveloppent une surface du 4ième ordre.*

Etant admise la relation

$$F(a, b, c, d) = 0,$$

l'enveloppe des plans polaires

$$(56^a.) \qquad a x_0 x + b y_0 y + c z_0 z + d t_0 t = 0$$

du point fixe (x_0, y_0, z_0, t_0) s'obtiendra en éliminant a, b, c, d entre l'équation (56.) et les suivantes

$$(57^a.) \qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial a}}{x_0 x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial b}}{y_0 y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{z_0 z} = \frac{\frac{\partial F}{\partial d}}{t_0 t}.$$

Effectuons ce calcul en prenant pour point de départ la relation (31.) que j'écrirai sous la forme

$$(58.) \qquad a_{12} ab + a_{13} ac + a_{14} ad + a_{23} bc + a_{24} bd + a_{34} cd = 0.$$

Dans le cas actuel les égalités (57.) nous donnent, en désignant par ϱ une indéterminée:

$$(59.) \qquad \begin{cases} a_{12} b + a_{13} c + a_{14} d = \varrho x_0 x, \\ a_{21} a + a_{23} c + a_{24} d = \varrho y_0 y, \\ a_{31} a + a_{32} b + a_{34} d = \varrho z_0 z, \\ a_{41} a + a_{42} b + a_{43} c = \varrho t_0 t; \\ a_{rs} = a_{sr}. \end{cases}$$

Les valeurs de a, b, c, d déduites des relations (59.) et transportées dans la relation (56^a.) nous donnent immédiatement pour l'équation du lieu

$$(60.)\quad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x_0x \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & y_0y \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} & z_0z \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & t_0t \\ x_0x & y_0y & z_0z & t_0t & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En effectuant un calcul semblable à celui qui vient d'être indiqué, on trouve que les surfaces conjuguées

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2 = 0$$

enveloppent une surface ayant pour équation

$$(61.)\quad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x^2 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & y^2 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} & z^2 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & t^2 \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Les conséquences énoncées dans le théorème XXIX. subsistent encore lorsqu'on assujétit le pôle d'un plan fixe à décrire une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre $ABCD$, puisque les constantes a, b, c, d devront alors vérifier une relation de même forme que la relation (58.).

Douai, 29. Juillet 1863.

Ueber einen Satz von *Steiner* und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

§. 1.

Ein Satz von *Steiner*. Ausdrücke der Coordinaten eines Punkts der Curve dritter Ordnung durch elliptische Functionen. Erzeugung der Curve durch Strahlbüschel.

Im 32sten Bande dieses Journals, p. 182 findet sich ein merkwürdiger Satz von *Steiner* über die Curven dritter Ordnung, welcher bisher von den Geometern wenig beachtet zu sein scheint. Dieser Satz lässt sich etwa folgendermassen ausdrücken:

Es giebt unendlich viele Polygone von 2n Seiten und 2n Ecken, deren Ecken auf einer gegebenen Curve dritter Ordnung liegen, deren ungerade Seiten sich in einem Punkte a derselben Curve treffen, und deren gerade Seiten durch einen zweiten Punkt b der Curve gehen. Ist a gegeben, so ist b dadurch mehrdeutig bestimmt; zu zwei zusammengehörigen Punkten a, b giebt es aber unendlich viele Polygone, indem die erste durch a gehende Seite ganz beliebig gewählt werden kann.

Einige Erweiterungen, welche *Steiner* giebt, führt man leicht auf diesen Satz und auf die zu entwickelnden Principien zurück; ebenso wird leicht das dualistische Gegenstück des Satzes ausgesprochen.

Die Natur des angeführten Satzes führt sofort zu der Vermuthung, dass man hier eines aus der Classe jener algebraischen Probleme vor sich habe, welche *Jacobi* mit der Theorie der elliptischen Functionen in so einfachen Zusammenhang bringen gelehrt hat. Und in der That wird diese Vermuthung bestätigt, wenn man die Entwickelungen zu Hülfe nimmt, welche Herr *Aronhold* in den Monatsberichten der Berliner Academie veröffentlicht hat (Sitzung vom 25. April 1861). Man gelangt von diesen ausgehend, zu einer sehr einfachen und merkwürdigen Formel, aus welcher sich nicht blos der angeführte *Steiner*sche Satz ergiebt, sondern aus der sich fast ohne alles Weitere ein grosser Theil derjenigen Sätze ableiten lässt, welche man in der Theorie der Curven dritter Ordnung aufgestellt hat. — A. a. O. weist Herr *Aronhold* folgenden Satz nach:

Ist $f(xxx)=0$ die Gleichung einer Curve dritter Ordnung, und

$$f(xx\alpha) = \tfrac{1}{3}\left\{\alpha_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\alpha_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right\};$$

bedeuten ferner α_1, α_2, α_3 die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve, a_1, a_2, a_3 die Coordinaten des Berührungspunktes einer von α an die Curve gezogenen Tangente; ist endlich $\Delta(xxx)$ die Determinante von f, dividirt durch 36, und wird $\Delta(xx\alpha)$ ähnlich wie $f(xx\alpha)$ definirt, so hat man

$$(1.)\qquad \frac{\Sigma\pm\alpha_1 x_2\,dx_3}{f(xx\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{d\lambda}{\sqrt{2T+3S\lambda-\lambda^3}},$$

wo

$$(2.)\qquad \lambda = -\frac{\Delta(aax)}{f(aax)},$$

und wo S, T die Invarianten von f sind.

Zugleich drücken sich die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve durch den Parameter λ auf folgende Weise aus. Es sei

$$f_i(xx)=\tfrac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x_i},\qquad \Delta_i(xx)=\tfrac{1}{3}\frac{\partial \Delta}{\partial x_i},$$

$$f_{ik}(x)=\tfrac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k},\qquad \Delta_{ik}(x)=\tfrac{1}{6}\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_i\partial x_k}.$$

Es seien ferner für die α, was immer erlaubt ist, die Ausdrücke gewählt:

$$(3.)\qquad \begin{cases}\alpha_1 = f_2(aa)\Delta_3(aa)-f_3(aa)\Delta_2(aa),\\ \alpha_2 = f_3(aa)\Delta_1(aa)-f_1(aa)\Delta_3(aa),\\ \alpha_3 = f_1(aa)\Delta_2(aa)-f_2(aa)\Delta_1(aa),\end{cases}$$

und die Unterdeterminanten aus den zweiten Differentialquotienten der Function $\Delta+\lambda f$ mit den Argumenten a_1, a_2, a_3 seien durch die Ausdrücke

$$36(A_{ik}+\lambda B_{ik}+\lambda^2 C_{ik})$$

dargestellt, wo λ in den A, B, C nicht mehr vorkommt; dann ist:

$$(4.)\qquad \begin{cases}Mx_1 = \Sigma(A_{1i}+\lambda B_{1i}+\lambda^2 C_{1i})f_i^{*})+\alpha_1\sqrt{\tfrac{1}{6}(2T+3S\lambda-\lambda^3)},\\ Mx_2 = \Sigma(A_{2i}+\lambda B_{2i}+\lambda^2 C_{2i})f_i \quad +\alpha_2\sqrt{\tfrac{1}{6}(2T+3S\lambda-\lambda^3)},\\ Mx_3 = \Sigma(A_{3i}+\lambda B_{3i}+\lambda^2 C_{3i})f_i \quad +\alpha_3\sqrt{\tfrac{1}{6}(2T+3S\lambda-\lambda^3)}.\end{cases}$$

---

*) Es ist f_i, Δ_i für $f_i(aa)$, $\Delta_i(aa)$ gesetzt, wo keine Verwechslung eintreten kann.

und M ist ein willkürlicher Factor. Es kann bemerkt werden, dass

$$\Sigma_i C_{ik} f_i = 6\Delta . a_i .$$

Durch die angeführten Formeln sind die Coordinaten eines variabeln Punktes der Curve dritter Ordnung als elliptische Functionen einer einzigen Veränderlichen darstellbar. Sind nämlich g, g', g'' die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(5.) \qquad \lambda^3 - 3S\lambda - 2T = 0,$$

so kann man setzen:

$$(6.) \qquad \begin{cases} \lambda = g' \sin^2 \mathrm{am}\, u + g'' \cos^2 \mathrm{am}\, u, \qquad k^2 = \dfrac{g''-g'}{g''-g}, \\ \sqrt{2T + 3S\lambda - \lambda^3} = (g''-g')\sqrt{g''-g} . \sin \mathrm{am}\, u \cos \mathrm{am}\, u\, \Delta \mathrm{am}\, u \end{cases}$$

und findet dann:

$$(7.) \qquad \int_{g''}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{2T + 3S\lambda - \lambda^3}} = \frac{u}{\sqrt{g''-g}}.$$

Die Formeln (4.) nehmen daher auch die Gestalt an:

$$(8.) \qquad \begin{cases} Mx_1 = \varphi_1(\sin^2 \mathrm{am}\, u) + m\alpha_1 \dfrac{d \sin^2 \mathrm{am}\, u}{du}, \\ Mx_2 = \varphi_2(\sin^2 \mathrm{am}\, u) + m\alpha_2 \dfrac{d \sin^2 \mathrm{am}\, u}{du}, \\ Mx_3 = \varphi_3(\sin^2 \mathrm{am}\, u) + m\alpha_3 \dfrac{d \sin^2 \mathrm{am}\, u}{du}. \end{cases}$$

Die Functionen φ sind ganze rationale Functionen ihrer Argumente, m ist eine Constante $\left(m = \dfrac{(g''-g')\sqrt{g''-g}}{2\sqrt{6}}\right)$.

Aber diese Darstellung hat noch eine andere, geometrische, Bedeutung. Sie liefert nämlich die Darstellung der Curve dritter Ordnung durch den Schnitt zweier Strahlenbüschel, welche ihre Scheitel auf der Curve selbst haben.

Denken wir uns einen Punkt β der Curve, und bezeichnen durch b den Berührungspunkt einer von β an die Curve gezogenen Tangente. Man kann β, b genau so benutzen wie oben α, a; setzt man also:

$$(9.) \qquad \mu = -\frac{\Delta(bbx)}{f(bbx)} = g' \sin^2 \mathrm{am}\, v + g'' \cos^2 \mathrm{am}\, v,$$

so hat man auch

$$(10.) \qquad \frac{\Sigma \pm \beta_1 x_2 dx_3}{f(xx\beta)} = \tfrac{1}{6} \frac{d\mu}{\sqrt{2T + 3S\mu - \mu^3}} = \frac{dv}{6\sqrt{g''-g}}.$$

Die Gleichungen (2.), (9.) stellen zwei Strahlenbüschel dar, bei denen λ, μ die veränderlichen Parameter sind. Strahlenbüschel von dieser Form haben, wie schon *Hesse* (dieses Journal Bd. 36, p. 145) gezeigt hat, ihre Scheitel in α, β. Man hat also zwei Strahlenbüschel vor sich, welche in beliebigen Punkten der Curve ihre Scheitel haben, und deren entsprechende Strahlen sich auf der Curve durchschneiden.

Die Abhängigkeit der Grössen λ, μ, welche dieses Entsprechen darstellt, findet man, indem man die x aus (2.), (9.) und der Gleichung der Curve eliminirt. Das Resultat muss sowohl für λ als für μ von der dritten Ordnung sein. Eine nähere Untersuchung zeigt, dass das Eliminationsresultat zwei der Frage fremde Factoren enthält, nach deren Absonderung sich jene Ordnung auf die zweite erniedrigt.

Dem Scheitelstrahl α, β nämlich entspricht, als Strahl des einen Büschels betrachtet, offenbar jeder Strahl des anderen Büschels, weil jeder solche mit jenem sich auf der Curve durchschneidet. Die Eliminationsgleichung muss daher einmal den Factor enthalten:

$$\Delta(aa\beta)+\lambda f(aa\beta) = 0,$$

insofern der durch diesen Werth von λ gegebene Strahl des Büschels α jeden Strahl β auf der Curve trifft, das andere Mal den Factor:

$$\Delta(bb\alpha)+\mu f(bb\alpha) = 0,$$

insofern der durch diesen Werth von μ gegebene Strahl des Büschels β jeden Strahl α auf der Curve schneidet. Der übrig bleibende Factor kann dann λ, μ nur noch zum Quadrat enthalten; er allein kommt hier in Frage. Diesen Factor ermittelt man folgendermassen.

Die Gleichung der Curve, vermöge deren

$$f_1(xx) : f_2(xx) : f_3(xx) = x_2dx_3-x_3dx_2 : x_3dx_1-x_1dx_3 : x_1dx_2-x_2dx_1,$$

führt die Gleichung mit sich:

$$\frac{\Sigma\pm\alpha_1x_2dx_3}{f(xx\alpha)} = \frac{\Sigma\pm\beta_1x_2dx_3}{f(xx\beta)},$$

oder auch

$$(11.)\qquad \frac{d\lambda}{\sqrt{2T+3S\lambda-\lambda^3}} = \frac{d\mu}{\sqrt{2T+3S\mu-\mu^3}}$$

oder endlich

$$(12.)\qquad v = u+c.$$

Die Argumente u, v unterscheiden sich also nur durch eine Constante, und die Relation zwischen λ, μ, welche die Beziehung der Strahlenbüschel zu einander ausdrückt, ist daher nichts anderes als der algebraische Ausdruck

dieser transcendenten Gleichung. So kann die Gleichung jeder Curve dritter Ordnung als eine Form des Additionstheorems der elliptischen Functionen aufgefasst werden.

Um aber jene algebraische Gleichung zu finden, braucht man nur die *Euler*schen Formeln (Institt. Calc. Int. vol. IV, p. 485) auf die Gleichung (11.) anzuwenden. Man findet dann:

$$(13.)\quad \lambda^2\mu^2-2\gamma\lambda\mu(\lambda+\mu)+\gamma^2(\lambda-\mu)^2+6S\lambda\mu+(8T+6\gamma S)(\lambda+\mu)+(9S^2+8\gamma T)=0,$$

welches die gesuchte Relation ist. Darin bezeichnet γ eine willkürliche Constante; aber willkürlich ist sie nur, in sofern wir die Gleichung (13.) aus (11.) abgeleitet haben. Um diese Gleichung völlig mit dem gesuchten Factor der Eliminationsgleichung zu identificiren, müssen wir noch γ entsprechend bestimmen.

Setzen wir $u=iK'$, so wird $v=c+iK'$, $\lambda=\infty$, $\mu=\gamma$. Es ist also

$$(14.)\quad \begin{cases} \gamma &= g'\sin^2\mathrm{am}(c+iK')+g''\cos^2\mathrm{am}(c+iK') \\ &= \dfrac{g-g''\cos^2\mathrm{am}\,c}{\sin^2\mathrm{am}\,c}. \end{cases}$$

Aber andererseits ersieht man aus der bei den Formeln (4.) gemachten Bemerkung, dass, wenn man $u=iK'$, $\lambda=\infty$ setzt, x in a übergeht. Der Strahl $\mu=\gamma$ geht also nach dem Punkte a hin, oder es ist:

$$(15.)\quad \gamma = -\frac{\Delta(bba)}{f(bba)}.$$

Ich bemerke dabei, dass die Symmetrie auch die Formel

$$(16.)\quad \gamma = -\frac{\Delta(aab)}{f(aab)}$$

erfordert. Dass eins das andere nach sich zieht, folgt in der That aus einer identischen Gleichung, welche in der Theorie der Curven dritter Ordnung oft von Nutzen ist, (*Salmon*, Phil. Transactions 1858, p. 535) nämlich:

$$\Delta(aaa).f(bbb)-\Delta(bbb).f(aaa) = \Delta(aab).f(bba)-\Delta(bba).f(aab).$$

So ist γ bestimmt; aus (14.) folgen zugleich für c die Formeln:

$$(17.)\quad \begin{cases} \sin^2\mathrm{am}\,c = \dfrac{(g''-g)f(aab)}{\Delta(aab)+g''f(aab)}, \\ \cos^2\mathrm{am}\,c = \dfrac{\Delta(aab)+gf(aab)}{\Delta(aab)+g''f(aab)}, \\ \Delta^2\mathrm{am}\,c = \dfrac{\Delta(aab)+g'f(aab)}{\Delta(aab)+g''f(aab)}, \\ \sin\mathrm{am}\,c\cos\mathrm{am}\,c\,\Delta\mathrm{am}\,c = \dfrac{\sqrt{f(aab)\{2T.f(aab)^3-3S.f(aab)^2\Delta(aab)+\Delta(aab)^3\}}}{(g''-g')\sqrt{g''-g}.\{f(aab)\}^2}. \end{cases}$$

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

§. 2.

Bedingung dafür, dass drei Punkte der Curve in einer Geraden liegen.

Ich gehe jetzt zu der Ableitung derjenigen Formel über, deren Anwendungen den Hauptinhalt dieses Aufsatzes zu bilden bestimmt sind. Es ist die Bedingung, welche zwischen den Argumenten dreier Punkte bestehen muss, damit die letzteren in einer Geraden liegen. Die Coordinaten x eines Punktes der Curve haben nach (4.) die Form:

$$Mx_i = p_i + q_i\lambda + r_i\lambda^2 + \alpha_i\sqrt{\varphi(\lambda)},$$

durch $\sqrt{\varphi(\lambda)}$ die Wurzelgrösse bezeichnet. Sind nun drei Punkte, denen die Werthe λ, λ', λ'' entsprechen, auf einer Geraden befindlich, so muss die aus ihren Coordinaten zusammengesetzte Determinante verschwinden. Wegen der Form der x aber ist dieselbe gleich der Summe der Producte aus entsprechenden Determinanten der unvollständigen Systeme:

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & \alpha_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & \alpha_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \sqrt{\varphi(\lambda)} \\ 1 & \lambda' & \lambda'^2 & \sqrt{\varphi(\lambda')} \\ 1 & \lambda'' & \lambda''^2 & \sqrt{\varphi(\lambda'')} \end{vmatrix},$$

oder man hat die Gleichung:

$$(1.) \qquad 0 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \sqrt{\varphi(\lambda)} \\ 1 & \lambda' & \lambda'^2 & \sqrt{\varphi(\lambda')} \\ 1 & \lambda'' & \lambda''^2 & \sqrt{\varphi(\lambda'')} \\ A & B & C & D \end{vmatrix},$$

wo

$$(2.) \quad A = \Sigma \pm q_1 r_2 \alpha_3, \quad B = -\Sigma \pm p_1 r_2 \alpha_3, \quad C = \Sigma \pm p_1 q_2 \alpha_3, \quad D = -\Sigma \pm p_1 q_2 r_3.$$

Mit Rücksicht nun auf die Bedeutungen der Grössen p, q, r, α, wie sie aus (3.), (4.), §. 1 folgen, kann man den ersten drei dieser Ausdrücke zuerst die Gestalt geben:

$$(3.) \qquad \begin{cases} A = \Sigma q_i f_i . \Sigma r_i \Delta_i - \Sigma q_i \Delta_i . \Sigma r_i f_i, \\ B = \Sigma r_i f_i . \Sigma p_i \Delta_i - \Sigma r_i \Delta_i . \Sigma p_i f_i, \\ C = \Sigma p_i f_i . \Sigma q_i \Delta_i - \Sigma p_i \Delta_i . \Sigma q_i f_i, \end{cases}$$

und es ist:

$$(4.) \qquad \begin{cases} \Sigma p_i f_i = \Sigma\Sigma A_{ik} f_i f_k, & \Sigma p_i \Delta_i = \Sigma\Sigma A_{ik} f_i \Delta_k, \\ \Sigma q_i f_i = \Sigma\Sigma B_{ik} f_i f_k, & \Sigma q_i \Delta_i = \Sigma\Sigma B_{ik} f_i \Delta_k, \\ \Sigma r_i f_i = \Sigma\Sigma C_{ik} f_i f_k, & \Sigma r_i \Delta_i = \Sigma\Sigma C_{ik} f_i \Delta_k. \end{cases}$$

Der letzte Ausdruck der ersten Verticalreihe verschwindet wegen der am Ende von §. 1 angeführten Bedingung; der erste ist, da die A_{ik} die aus den Grössen $\frac{1}{6}\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_i \partial a_k}$ zusammengesetzten Unterdeterminanten bedeuten, eine von f und Δ unabhängige Covariante sechster Ordnung. Den zweiten Ausdruck reducirt man bequem mit Hülfe eines Formelsystems, ähnlich demjenigen, welches ich Bd. 62, p. 240 dieses Journals abgeleitet habe. Die Determinante nämlich

$$(5.)\quad \left\{ \begin{vmatrix} \Delta_{11}+\lambda f_{11} & \Delta_{12}+\lambda f_{12} & \Delta_{13}+\lambda f_{13} & \Delta_1+\mu f_1 \\ \Delta_{12}+\lambda f_{12} & \Delta_{22}+\lambda f_{22} & \Delta_{23}+\lambda f_{23} & \Delta_2+\mu f_2 \\ \Delta_{13}+\lambda f_{13} & \Delta_{23}+\lambda f_{23} & \Delta_{33}+\lambda f_{33} & \Delta_3+\mu f_3 \\ \Delta_1+\nu f_1 & \Delta_2+\nu f_2 & \Delta_3+\nu f_3 & 0 \end{vmatrix} \right.$$
$$= (P+\lambda Q+\lambda^2 R)+(P_1+\lambda Q_1+\lambda^2 R_1)(\mu+\nu)+(P_2+\lambda Q_2+\lambda^2 R_2)\mu\nu$$

reducirt sich, wenn $\mu=\lambda$, auf $-(\Delta+\nu f)\cdot\frac{1}{6}\Delta(\Delta+\lambda f)$ oder auf:

$$-[f\cdot\{3S\lambda^2+6T\lambda+3S^2\}+\Delta\cdot\{\lambda^3-3S\lambda-2T\}]\,\frac{\Delta+\nu f}{6}.$$

Man hat also die Relationen:

$$(6.)\quad \begin{cases} P = -(3S^2 f-2T\Delta)\frac{\Delta}{6}, & P_1 = -(3S^2 f-2T\Delta)\frac{f}{6}, \\ Q+P_1 = -(2Tf-S\Delta)\frac{\Delta}{2}, & Q_1+P_2 = -(2Tf-S\Delta)\frac{f}{2}, \\ R+Q_1 = -\frac{Sf\Delta}{2}, & R_1+Q_2 = -\frac{Sf^2}{2}, \\ R_1 = -\frac{\Delta^2}{6}, & R_2 = -\frac{\Delta f}{6}. \end{cases}$$

Da nun der zweite der oben betrachteten Ausdrücke nichts anderes ist als $-Q_2$, so wird derselbe, nach diesen Formeln und wegen $f=0$, auch $=R_1$ oder $=-\frac{\Delta^2}{6}$. Und man hat also, die Covariante sechster Ordnung durch Ψ bezeichnet:

$$\Sigma p_i f_i = \Psi, \qquad \Sigma q_i f_i = -\frac{\Delta^2}{6}, \qquad \Sigma r_i f_i = 0.$$

Die übrigen drei Ausdrücke (4.) sind $-P_1$, $-Q_1$, $-R_1$; und da $-P_2$ mit Ψ identisch ist, so wird in Folge des Systems (6.):

$$\Sigma p_i \Delta_i = 0, \qquad \Sigma q_i \Delta_i = -\Psi, \qquad \Sigma r_i \Delta_i = \frac{\Delta^2}{6}.$$

Demnach erhält man aus (3.):

$$(6^a.) \qquad A = -\frac{\Delta^4}{36}, \qquad B = -\frac{\Psi\Delta^2}{6}, \qquad C = -\Psi^2.$$

Etwas mehr Schwierigkeiten macht die Darstellung von D. Dieser Ausdruck unterscheidet sich nur durch einen Factor von der von Herrn *Brioschi**) aufgefundenen Covariante neunter Ordnung, welche sich nicht selbst als rationale Function von f, Δ, Ψ darstellt, sondern deren Quadrat erst diese Darstellung erlaubt.

Verallgemeineren wir das System (6.) dadurch, dass wir in (5.) die letzte Horizontalreihe durch beliebige Grössen γ ersetzen. Wir haben dann

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11}+\lambda f_{11} & \Delta_{21}+\lambda f_{21} & \Delta_{31}+\lambda f_{31} & \Delta_1+\mu f_1 \\ \Delta_{12}+\lambda f_{12} & \Delta_{22}+\lambda f_{22} & \Delta_{32}+\lambda f_{32} & \Delta_2+\mu f_2 \\ \Delta_{13}+\lambda f_{13} & \Delta_{23}+\lambda f_{23} & \Delta_{33}+\lambda f_{33} & \Delta_3+\mu f_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \end{vmatrix} = \Sigma\gamma_i \begin{Bmatrix} (\Pi_i+K_i\lambda+P_i\lambda^2) \\ +(\Pi_i'+K_i'\lambda+P_i'\lambda^2)\mu \end{Bmatrix}.$$

Für $\mu = \lambda$ geht der linke Theil über in

$$-\frac{\gamma_1 a_1+\gamma_2 a_2+\gamma_3 a_3}{6}\Delta(\Delta+\lambda f);$$

und man hat also durch Vergleichung der Coefficienten die Relationen:

$$\Pi_i = -\frac{a_i}{6}(3S^2 f-2T\Delta),$$

$$K_i+\Pi_i' = -\frac{a_i}{6}(6Tf-3S\Delta),$$

$$P_i+K_i' = -\frac{a_i}{6}\cdot 3Sf,$$

$$P_i' = -\frac{a_i}{6}\cdot\Delta.$$

Nun unterscheiden sich die Elemente der Determinante D nicht von den Grössen $-\Pi_i'$, $-K_i'$, $-P_i'$; und man kann also setzen:

$$D = -\frac{\Delta}{6}\cdot\Sigma\pm\Pi_1' P_2 a_3.$$

Verstehen wir nun unter D_{ik}, F_{ik} die aus den Grössen $\frac{1}{6}\frac{\partial^2\Delta}{\partial a_i \partial a_k}$, $\frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_k}$ zusammengesetzten Unterdeterminanten, so ist

$$\Pi_i' = \Sigma_k D_{ik} f_k, \qquad P_i = \Sigma_k F_{ik}\Delta_k.$$

---

*) Comptes Rendus 1863, p. 304.

Es ist daher das Quadrat von $-D$ auch gleich folgendem Ausdruck:

$$(-D)^2 = -\frac{\Delta^2}{36}\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \Sigma_k D_{1k} f_k & \Sigma_k F_{1k} \Delta_k & a_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \Sigma_k D_{2k} f_k & \Sigma_k F_{2k} \Delta_k & a_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & \Sigma_k D_{3k} f_k & \Sigma_k F_{3k} \Delta_k & a_3 \\ \Sigma_k D_{1k} f_k & \Sigma_k D_{2k} f_k & \Sigma_k D_{3k} f_k & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_k F_{1k} \Delta_k & \Sigma_k F_{2k} \Delta_k & \Sigma_k F_{3k} \Delta_k & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir die ersten drei Verticalreihen respective mit Δ_1, Δ_2, Δ_3 und ziehen sie von der fünften ab, und verfahren wir ebenso mit den Horizontalreihen, so erhalten wir eine Determinante, welche sich zerlegen lässt, wie folgt:

$$(-D)^2 = +\frac{\Delta^2}{36}\Bigg\{ \Psi \cdot \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \Sigma D_{1k} f_k & a_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \Sigma D_{2k} f_k & a_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & \Sigma D_{3k} f_k & a_3 \\ \Sigma D_{1k} f_k & \Sigma D_{2k} f_k & \Sigma D_{3k} f_k & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\Delta^2 \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \Sigma D_{1k} f_k \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \Sigma D_{2k} f_k \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & \Sigma D_{3k} f_k \\ \Sigma D_{1k} f_k & \Sigma D_{2k} f_k & \Sigma D_{3k} f_k & 0 \end{vmatrix} \Bigg\}.$$

Die erste hier vorkommende Determinante kann man sofort in folgende umwandeln, welche nach dem Satz über die Zerlegung in Summen von Producten in die vorige übergeht:

$$\begin{vmatrix} \Sigma\Sigma f_{ik} D_{im} f_m D_{kn} f_n & \Sigma\Sigma f_{ik} D_{im} f_m a_k \\ \Sigma\Sigma f_{ik} D_{im} f_m a_k & \Sigma\Sigma f_{ik} a_i a_k \end{vmatrix} = -(\Sigma\Sigma D_{im} f_i f_m)^2.$$

Die andere geht, da die aus den F_{ik} gebildeten Unterdeterminanten den Grössen $\frac{1}{6}\Delta . f_{ik}$ gleich werden, über in

$$-\frac{\Delta}{6}\Sigma\Sigma D_{im} D_{kn} f_i f_k f_{mn}.$$

Ist $D_{ki,mn}$ eine Unterdeterminante zweiter Ordnung, so hat man bekanntlich

$$D_{mi} D_{kn} = D_{ki} D_{mn} - D . D_{ki,mn}, \quad D = \tfrac{1}{6}\Delta(\Delta);$$

also

$$\Sigma\Sigma D_{im} D_{kn} f_i f_k f_{mn} = \Sigma\Sigma D_{ki} f_i f_k \Sigma\Sigma D_{mn} f_{mn} - \frac{\Delta(\Delta)}{6} \cdot \Sigma\Sigma D_{ki,mn} f_{mn} f_i f_k .$$

Setzen wir für den Augenblick $\delta_m \delta_k$ für f_{mn}, so ist symbolisch:

$$\Sigma\Sigma D_{ki,mn} f_{mn} f_i f_k = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & f_1 & \delta_1 \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & f_2 & \delta_2 \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & f_3 & \delta_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 & 0 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

oder, wenn auch noch symbolisch $\vartheta_i \vartheta_k$ für Δ_{ik} gesetzt wird:

$$= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 \end{vmatrix}^2 = - \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 & \delta_1 & \vartheta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_2 & \delta_2 & \vartheta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_3 & \delta_3 & \vartheta_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man nun die drei ersten Verticalreihen mit a_1, a_2, a_3 und zieht das Resultat von der vierten ab, und verfährt man sodann mit den Horizontalreihen ebenso, so ergiebt sich

$$- \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & 0 & \delta_1 & \vartheta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & 0 & \delta_2 & \vartheta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & 0 & \delta_3 & \vartheta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Sigma\delta_i a_i & -\Sigma\vartheta_i a_i \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & -\Sigma\delta_i a_i & 0 & 0 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & -\Sigma\vartheta_i a_i & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(\Sigma\delta_i a_i)^2 \Sigma\Sigma F_{ik} \vartheta_i \vartheta_k + 2\Sigma\delta_i a_i . \Sigma\vartheta_i a_i \Sigma\Sigma F_{ik} \delta_i \vartheta_k - (\Sigma\vartheta_i a_i)^2 \Sigma\Sigma F_{ik} \delta_i \delta_k$$

oder, wenn man die symbolischen Ausdrücke wieder durch die wirklichen ersetzt:

$$= 2\Sigma\Sigma F_{ik} f_i \Delta_k - \Delta \Sigma\Sigma F_{ik} f_{ik} = -\frac{\Delta^2}{6}.$$

Fassen wir alles zusammen, so haben wir nunmehr den Ausdruck:

$$(-D)^2 = \frac{\Delta^3}{36}\left[-\Psi.(\Sigma\Sigma D_{ik} f_i f_k)^2 - \frac{\Delta^3}{6}\Sigma\Sigma D_{ik} f_i f_k . \Sigma\Sigma D_{mn} f_{mn} - \frac{\Delta^5}{216}\Delta(\Delta)\right].$$

Es bleibt übrig zu bemerken, dass $\Delta(\Delta) = -2T\Delta$; dass ferner $\Sigma\Sigma D_{mn} f_{mn}$ der Coefficient von λ in der Entwicklung von $\frac{1}{6}\Delta(\Delta + \lambda f)$, also gleich $-\frac{1}{2}S\Delta$

ist; daher hat man endlich

$$(-D)^2 = \frac{\Delta^2}{36}\left[-\Psi^3 + \frac{3S\Delta^4\Psi}{36} + \frac{2T\Delta^6}{216}\right].$$

Setzen wir nun

$$(7.) \qquad \frac{6\Psi}{\Delta^2} = \lambda^0,$$

so hat man

$$\frac{B}{A} = \lambda^0, \qquad \frac{C}{A} = \lambda^{0^2}, \qquad \frac{D}{A} = \sqrt{\tfrac{1}{6}(-\lambda^{0^3} + 3S\lambda^0 + 2T)} = \sqrt{\varphi(\lambda^0)},$$

und die Gleichung (1.) geht über in:

$$(8.) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \sqrt{\varphi(\lambda)} \\ 1 & \lambda' & \lambda'^2 & \sqrt{\varphi(\lambda')} \\ 1 & \lambda'' & \lambda''^2 & \sqrt{\varphi(\lambda'')} \\ 1 & \lambda^0 & \lambda^{0^2} & \sqrt{\varphi(\lambda^0)} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist nach dem *Abel*schen Theorem der Ausdruck dafür, dass

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} + \int \frac{d\lambda'}{\sqrt{\varphi(\lambda')}} + \int \frac{d\lambda''}{\sqrt{\varphi(\lambda'')}} + \int \frac{d\lambda^0}{\sqrt{\varphi(\lambda^0)}} = \text{Const.}$$

In der That, wir können uns in Folge der Gleichung (8.) drei Zahlen m, a, b so bestimmt denken, dass λ, λ', λ'', λ^0 die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$(z-a).(z-b) - m\sqrt{\varphi(z)} = 0$$

sind. Nun ist, Summe und Productzeichen immer auf die vier Werthe der λ ausgedehnt,

$$\Sigma \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} = m\Sigma \frac{d\lambda}{\lambda - a.\lambda - b} = \frac{m}{a-b}\left(\Sigma \frac{d\lambda}{\lambda - a} - \Sigma \frac{d\lambda}{\lambda - b}\right)$$

$$= \frac{m}{a-b}\left\{d\log \Pi \frac{\lambda - a}{\lambda - b} + da\,\Sigma \frac{1}{\lambda - a} - db\,\Sigma \frac{1}{\lambda - b}\right\}.$$

Da ferner identisch:

$$\Pi(\lambda - z) = (z-a)^2(z-b)^2 - m^2.\varphi(z),$$

so ist auch

$$\Pi'(\lambda - z) = -2(z-a)(z-b)(2z-a-b) + m^2.\varphi'(z).$$

Daher für $z = a$ und $z = b$:

$$\Pi(\lambda - a) = -m^2\varphi(a), \qquad \Pi'(\lambda - a) = m^2\varphi'(a),$$
$$\Pi(\lambda - b) = -m^2\varphi(b), \qquad \Pi'(\lambda - b) = m^2\varphi'(b)$$

und endlich deswegen:

$$\Sigma \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} = \frac{m}{a-b}\left\{d\log\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)} - \frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}da + \frac{\varphi'(b)}{\varphi(b)}db\right\} = 0, \quad \text{q. e. d.}$$

Ist nun also

$$(9.) \qquad \lambda^{(i)} = g' \sin^2 \operatorname{am} u^{(i)} + g'' \cos^2 \operatorname{am} u^{(i)},$$

so geht die Gleichung (8.) auch über in:

$$(10.) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 \operatorname{am} u & \sin^4 \operatorname{am} u & \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \Delta \operatorname{am} u \\ 1 & \sin^2 \operatorname{am} u' & \sin^4 \operatorname{am} u' & \sin \operatorname{am} u' \cos \operatorname{am} u' \Delta \operatorname{am} u' \\ 1 & \sin^2 \operatorname{am} u'' & \sin^4 \operatorname{am} u'' & \sin \operatorname{am} u'' \cos \operatorname{am} u'' \Delta \operatorname{am} u'' \\ 1 & \sin^2 \operatorname{am} u^0 & \sin^4 \operatorname{am} u^0 & \sin \operatorname{am} u^0 \cos \operatorname{am} u^0 \Delta \operatorname{am} u^0 \end{vmatrix},$$

oder in

$$(11.) \qquad u + u' + u'' + u^0 \equiv 0,$$

wobei das Zeichen $\equiv$ andeutet, dass der Ausdruck links entweder gleich Null selbst, oder nur um einen Ausdruck der Form $2pK + 2qiK'$ davon verschieden sein soll, p, q als ganze Zahlen vorausgesetzt.

Die Vorzeichen der ersten drei Glieder in der letzten Verticalreihe sind jedenfalls gleich anzunehmen; für das letzte kann man das Zeichen beliebig wählen, da u^0 aus (9.) zweideutig bestimmt ist, uud zwar so, dass die Producte $\sin . \cos . \Delta$ für beide Werthe gleich und entgegengesetzt werden.

Und so hat man endlich den Satz *):

Wenn drei Punkte der Curve auf gerader Linie liegen, so ist immer die Summe ihrer Argumente constant, $= -u^0$, *und zwar ist:*

$$g' \sin^2 \operatorname{am} u^0 + g'' \cos^2 \operatorname{am} u^0 = \frac{6\Psi}{\Delta^2},$$

$$\sin \operatorname{am} u^0 \cos \operatorname{am} u^0 \Delta \operatorname{am} u^0 = \frac{6\sqrt{6}}{(g''-g')\sqrt{g''-g}} \cdot \frac{\Omega}{\Delta^3},$$

wo Ω *bis auf einen Zahlenfactor die Brioschische Covariante bezeichnet* **).

Setzen wir $u' = u$, so wird $u'' \equiv -(u^0 + 2u)$, und man hat den Satz:

Ist u das Argument des Berührungspunktes einer Tangente, die von einem Punkt der Curve gezogen ist, so ist das Argument des letzteren Punktes $-(u^0 + 2u)$.

Da dies Argument sich nur um gerade Vielfache von K oder iK' ändert, wenn u durch $u+K$, $u+iK'$, $u+K+iK'$ ersetzt wird, so sind die letzteren Ausdrücke die Argumente der Berührungspunkte für die anderen drei von jenem Punkte aus gezogenen Tangenten.

---

*) Dieser Satz, wie einige andere in diesem Aufsatze, sind specielle Fälle eines aus dem *Abel*schen Theorem fliessenden sehr allgemeinen Satzes, welchen ich in einer anderen Abhandlung beweisen werde.

**) $\Omega = \Sigma \pm \Pi_1' P_2 a_3$.

§. 3.

Die *Steiner*schen Polygone.

Die Frage nach den *Steiner*schen Polygonen kann mit Hülfe des soeben entwickelten Satzes auf höchst einfache und elegante Weise erledigt werden. Betrachten wir den Punkt α gewissermassen als Anfangspunkt einer Art von Coordinatensystem; und bezeichnen wir jeden Punkt der Curve durch denjenigen Werth (Argument), welchen die Variable u für denselben annimmt. Demnach seien v, w die Punkte, in denen sich beziehungsweise die geraden und die ungeraden Seiten eines $2n$-Ecks durchschneiden sollen, dessen Ecken $z_1, z_2, \ldots z_{2n}$ seien. Der Umstand, dass je zwei auf einanderfolgende Ecken des Polygons mit einem der Punkte v, w in einer Geraden liegen sollen, bedingt dann folgendes System von Relationen:

$$(1.)\quad \begin{cases} 0 \equiv z_1+z_2+v+u_0, \\ 0 \equiv z_2+z_3+w+u_0, \\ 0 \equiv z_3+z_4+v+u_0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \equiv z_{2i-1}+z_{2i}+v+u_0, \\ 0 \equiv z_{2i}+z_{2i+1}+w+u_0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \equiv z_{2n-1}+z_{2n}+v+u_0, \\ 0 \equiv z_{2n}+z_1+w+u_0. \end{cases}$$

Addirt man die erste, dritte, fünfte, etc. der obigen Gleichungen, und zieht von der Summe die zweite, vierte, etc. ab, so bleibt:

$$0 \equiv n(v-w)$$

oder

$$(2.)\quad w = v+\frac{2(pK+qiK')}{n},$$

wo p und q ganze Zahlen sind.

Man erkennt hierin sofort den Beweis des *Steiner*schen Satzes und den Zusammenhang der Aufgabe mit der Transformation der elliptischen Functionen. Denn in den Gleichungen (1.) bleibt offenbar eines der z beliebig; die erste Seite des Polygons kann durch v beliebig gezogen werden. Aber der Punkt w ist durch den Punkt v vollständig, wenn auch mehrdeutig, bestimmt; zu jedem Punkt v gehört eine gewisse Anzahl von Punkten, die als Punkte w angesehen werden dürfen. *Und zwar erfordert die Auffindung aller Punkten-*

paare v, w nichts als die Auflösung der Modulargleichung für die Transformation n^{ter} Ordnung.

Aus den Gleichungen (1.) folgen unter anderen die Gleichungen:

$$z_3 - z_1 \equiv z_5 - z_3 \equiv \cdots \equiv v - w,$$

$$z_4 - z_2 \equiv z_6 - z_4 \equiv \cdots \equiv w - v.$$

Man hat daher:

$$(3.) \quad \begin{cases} z_3 = z_1 - \varepsilon, \; z_5 = z_1 - 2\varepsilon, \; \ldots \; z_{2h+1} = z_1 - h\varepsilon, \; \ldots \; z_{2n-1} = z_1 - (n-1)\varepsilon, \\ z_4 = z_2 + \varepsilon, \; z_6 = z_2 + 2\varepsilon, \; \ldots \; z_{2h+2} = z_2 + h\varepsilon, \; \ldots \; z_{2n} = z_2 + (n-1)\varepsilon, \end{cases}$$

wo der Kürze wegen

$$\varepsilon = \frac{2(pK + qiK')}{n}$$

gesetzt ist. Die Gleichungen (1.) gehen dann in die eine über:

$$(4.) \quad 0 = z_1 + z_2 + v + u_0,$$

welche zwischen den Argumenten v, z_1, z_2 der ersten Polygonseite festsetzt, dass die entsprechenden Punkte auf einer Geraden liegen sollen.

Die Zahlen p, q in ε können die Werthe 0, 1, 2, ... $n-1$ erhalten. Das entstehende Polygon ist offenbar immer ein eigentliches, nicht aus wiederholten Umgängen eines Polygons von geringerer Seitenzahl entstandenes, sobald p und q nicht gleichzeitig denselben Factor mit n gemein haben, weil im Allgemeinen nur dann die z gruppenweise gleich werden können. Man hat also den Satz:

Zu jedem Punkte v der Curve gehören soviel Punkte w, als Zahlenpaare p, q $(< n)$ existiren, welche mit n keinen Factor gemein haben.

Aber insbesondere können n aufeinanderfolgende Ecken mit den übrigen paarweise zusammenfallen, und eine nicht geschlossene Figur aus $n-1$ Strecken bilden; wenn nämlich $z_1 - z_2$ ein Vielfaches von ε wird, wo dann eine gerade und eine ungerade Seite Tangente der Curve wird. Man kann stets nur *ein* solches degenerirtes Polygon bilden; und zwar kann dies dadurch geschehen, dass man die erste beliebige Seite Tangente werden lässt.

Da in der Gleichung (4.) zwei von den Grössen z_1, z_2, v beliebig angenommen werden können, und da zugleich z_1 die ungeraden, z_2 die geraden Ecken des Polygons vollständig bestimmt, so kann man auch folgenden Satz aussprechen:

Wenn man die ungeraden Ecken eines Steinerschen Polygons als die ungeraden Ecken eines neuen $2n$-Ecks betrachtet, ohne ihre Reihenfolge

anders als cyclisch zu ändern, und wenn man ebenso die geraden Ecken eines anderen Steinerschen Polygons als die geraden Ecken dieses neuen betrachtet, so ist das neue Polygon abermals ein Steinersches.

So kann man also, wenn zwei Punktenpaare v, w gegeben sind, deren unendlich viele bilden. Aber auch ein einziges genügt hierzu schon. Ist nämlich v, w ein gegebenes Punktenpaar, und verbindet man v und w mit einem beliebigen Punkte s der Curve, so erhält man als weitere Durchschnitte der Verbindungslinien mit der Curve zwei neue Punkte w', v'; und zwar ist:

$$w' \equiv -(u^0+s+v),$$
$$v' \equiv -(u^0+s+w),$$

also

$$w'-v' \equiv w-v \equiv \varepsilon,$$

d. h. auch v', w' ist ein *Steiner*sches Punktenpaar.

Bezeichnen wir zwei Punktenpaare als *zu derselben Classe* gehörig, wenn p, q für sie denselben Werth haben, so kann man also den Satz aussprechen:

Verbindet man ein Steinersches Punktenpaar mit irgend einem Punkte der Curve, so schneiden die Verbindungslinien die Curve in einem neuen Punktenpaar derselben Classe, so dass man alle Punktenpaare derselben Classe aus einem derselben erhält, indem man den willkürlichen Punkt sich über die Curve bewegen lässt.

Einen speciellen Fall dieses Satzes hat *Steiner* angegeben, nämlich denjenigen, wo $n=3$, und wo die gegebenen Punkte zwei Wendepunkte sind. Von diesen wird weiter unten die Rede sein.

Die verschiedenen *Classen* von Punktenpaaren ordnen sich in *Gruppen*, sofern wir als derselben Gruppe angehörig solche Punktenpaare betrachten, für welche $w-v \equiv \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ \ldots\ (n-1)\varepsilon$. Aber bemerken wir dabei, dass die zu $h\varepsilon$ und $(n-h)\varepsilon$ gehörigen Classen einer Gruppe nicht von einander verschieden sind, indem dieselben durch blosse Vertauschung von v mit w in einander übergehen. Ferner sind in jeder Gruppe, wenn n keine Primzahl ist, Classen uneigentlicher Polygone enthalten.

Sind zwei Paare v, w; v', w' derselben Gruppe gegeben, und verbindet man v mit w', v' mit w oder v mit v', w mit w', so schneiden die Verbindungslinien die Curve in zwei neuen Punktenpaaren, welche derselben Gruppe angehören. Nur wenn beide Paare auch von derselben Classe sind, fällt eines der neuen Paare in einen Punkt der Curve zusammen.

Der Beweis ist wie oben. Man kann, wenn man diesen Satz mit dem vorigen verbindet, auch alle Punktenpaare einer *Gruppe* aus einem einzigen derselben auf lineare Weise ableiten.

Dagegen ist es nicht möglich, Punktenpaare *verschiedener* Gruppen zu construiren, wenn man ein einziges Paar gegeben vorfindet. Um alle Paare, die zu einer Zahl n gehören, zu finden, bedarf man zweier Paare, welche nicht derselben Gruppe angehören. Entspricht den Grössen v, w, ε in dem einen Paar v', w', ε' im anderen, und führt man wieder dieselbe Construction wie vorhin aus, so gelangt man zu einem dritten Paar v'', w'', ε'', und zwar ist $\varepsilon'' = \pm\varepsilon \pm \varepsilon'$. Man hat also den Satz:

Sind zwei Paare v, w; v', w' verschiedener Gruppen gegeben, und verbindet man v mit w', v' mit w oder v mit v', w mit w', so erhält man ein drittes Paar, welches einer anderen Gruppe angehört. Aus zwei gegebenen Paaren verschiedener Gruppen kann man überhaupt alle Paare construiren, welche einer Zahl n zugehören, wenn

$$\varepsilon = \frac{2pK + 2qiK'}{n},$$

$$\varepsilon' = \frac{2p'K + 2q'iK'}{n}$$

und weder p, p' noch q, q' einen Factor mit n gemeinschaftlich haben.

Es liegt auf der Hand, wie man diese Betrachtungen fortsetzen und aus Paaren, die zu den Zahlen n, n' gehören, ein zu n'' gehöriges Paar finden kann, wenn n'' die kleinste Zahl ist, in welcher n und n' aufgehen. Ueberhaupt findet hier jeder Satz der Transformationstheorie seinen geometrischen Ausdruck. Jeder Classe entspricht eine $n$fach getheilte Periode, jeder Gruppe eine Wurzel der Modulargleichung, u. s. w. Ich will nur noch den Satz beweisen, welchen *Steiner* a. a. O. giebt, und den man so aussprechen kann:

Gehören zwei Punkte v, w zur Zahl n, verbindet man v mit w, und zieht von dem dritten Schnittpunkt r der Geraden mit der Curve eine Tangente, welche in s berührt, so gehören die Paare v, s; w, s zur Zahl $2n$.

Man hat nämlich:

$$w - v \equiv \varepsilon,$$

$$u^0 + v + w + r \equiv 0, \quad 2s + r + u^0 \equiv 0, \quad \text{also} \quad 2s \equiv v + w.$$

Daher ist sowohl $2(s-v)$ mit ε, als $2(s-w)$ mit $-\varepsilon$ congruent, und also

$s-v$, $s-w$ congruent mit Ausdrücken der Form

$$\pm\frac{\varepsilon}{2}+aK+biK'=\frac{2(na\pm p)K+2(nb\pm q)iK'}{2n}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Betrachten wir sämmtliche zu demselben v gehörige $w=v+\varepsilon$. Auch diese sondern sich in Gruppen, und zwar so, dass jedes w nur einer Gruppe angehört, dass zu jeder Gruppe $n-1$ Punkte w gehören, und dass ausserdem v selbst als zu jeder Gruppe gehörig betrachtet werden kann. Dies führt sogleich auf den Satz:

Die zu v gehörigen Punkte w ordnen sich in $n+1$ Gruppen so, dass jede aus $n-1$ Punkten bestehende Gruppe mit v zusammen als die Gruppe der geraden oder ungeraden Ecken eines (eigentlichen oder uneigentlichen) Steinerschen $2n$-Ecks angesehen werden kann.

Wenn also ausser v ein, einem eigentlichen $2n$-Eck entsprechender Punkt $w=v+\varepsilon$ gegeben ist, kann man sofort alle derselben Gruppe angehörigen Punkte $v+2\varepsilon$, $v+3\varepsilon$, ... construiren. Man nimmt einen beliebigen Punkt V auf der Curve an, verbindet ihn mit v und erhält den Durchschnitt z dieser Geraden mit der Curve. Verbindet man z mit $v+\varepsilon$, so erhält man einen Punkt W; und indem man nun das *Steiner*sche $2n$-Eck ausführt, dessen erste drei Ecken v, z, $v+\varepsilon$ sind, dessen ungerade Seiten sich in V, und dessen gerade Seiten sich in W treffen, erhält man die Ecken $z-\varepsilon$, $z-2\varepsilon$, ..., $v+2\varepsilon$, $v+3\varepsilon$, ..., also die gesuchte Gruppe.

Sind zwei Punkte w gegeben, welche nicht derselben Gruppe angehören, und also etwa durch $v+\varepsilon$, $v+\varepsilon'$ bezeichnet seien, so kann man sofort auch Punkte anderer Gruppen construiren. Verbindet man nämlich $v+\varepsilon$ mit $v+\varepsilon'$, und den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie und der Curve mit v, so ist der dritte Punkt der letzteren Linie $v+\varepsilon+\varepsilon'$, also einer neuen Gruppe angehörig. Und zwar erhält man offenbar allmälig alle Gruppen, wenn in ε und ε' weder die Coefficienten von $2K$ noch die von $2iK'$ einen Factor mit n gemeinsam haben.

Gehörten dagegen $v+\varepsilon$, $v+\varepsilon'$ zu verschiedenen Zahlen n, so gehört der so construirte neue Punkt zu derjenigen kleinsten Zahl n'', in welcher n, n' gleichzeitig aufgehen. Die Construction eines Polygons von $2.a^\alpha.b^\beta.c^\gamma\ldots$ Ecken kommt daher, wenn a, b, c, ... Primzahlen, unmittelbar auf die von Polygone mit $2a^\alpha$, $2b^\beta$, $2c^\gamma$ ... Ecken zurück.

§. 4.

Anwendungen auf die Fälle, in denen $n=2$ und $n=3$. Merkwürdige Punktsysteme, welche das System der Wendepunkte als speciellen Fall enthalten.

Setzen wir $n=2$. In diesem Falle gehören zu einem gegebenen Punkte v drei Punkte w, welche in der Form $v+pK+qiK'$ enthalten sind, d. h. die drei Punkte $v+K$, $v+iK'$, $v+K+iK'$. Dies aber sind nach dem Früheren mit v zusammen Berührungspunkte der von demselben Punkte aus gezogenen Tangenten. Nimmt man hinzu, dass die Paare gegenüberliegender Ecken nach (3.) sich ganz ähnlich ausdrücken, so gelangt man zu dem bekannten Satze:

Wenn ein vollständiges Vierseit seine Ecken auf der Curve hat, so schneiden sich die Tangenten der gegenüberliegenden Eckpunkte ebenfalls auf der Curve. (*Poncelet*, d. J. Bd. 8, p. 131. *Hesse*, d. J. Bd. 36, p. 151.)

Die Untersuchung des Falles $n=3$ ist durch seine Beziehung zu den Wendepunkten wichtig.

Die Theorie der Wendepunkte nimmt mit Hülfe der obigen Betrachtungen eine sehr einfache Gestalt an. Wenn nämlich eine Gerade die Curve in drei zusammenfallenden Punkten schneidet, und u das gemeinschaftliche Argument derselben bedeutet, so ist

$$3u+u_0 \equiv 0$$

oder

$$(1.) \qquad u = -\frac{u_0}{3}+\frac{2(pK+qiK')}{3}.$$

Die 9 Wendepunkte erhält man also sofort, indem man in den Formeln §. 1 (8.) die 9 Werthe des Arguments einsetzt, welche aus dem obigen Ausdruck entspringen. Auf einer geraden Linie liegen dann immer die Wendepunkte, für deren Argumente die Summe der p sowohl als die Summe der q durch 3 theilbar ist. Ordnet man die Werthpaare p, q wie die Elemente einer Determinante in das Schema

$$\begin{matrix} 0,0 & 0,1 & 0,2 \\ 1,0 & 1,1 & 1,2 \\ 2,0 & 2,1 & 2,2, \end{matrix}$$

so liegen in einer Geraden die Punkte, welche derselben Horizontalreihe, solche, welche derselben Verticalreihe entsprechen, und endlich solche, welche, das obige Schema als Determinante aufgefasst, in derselben mit einander multiplicirt erscheinen würden. Die vier Wendepunktsdreiecke bestehen aus den

Geraden der Horizontalreihen, denen der Verticalreihen, denen der positiven und denen der negativen Determinantenglieder.

Da eine der vier von einem Wendepunkte an die Curve gezogene Tangenten in die Wendetangente selbst fällt, so erhält man die Argumente der Berührungspunkte der anderen, wenn man zu dem Argument des Wendepunkts eine der Grössen K, iK' oder $K+iK'$ addirt. Zu dem Wendepunkte mit dem Argument

$$-\frac{u_0}{3}+\frac{2(pK+qiK')}{3}$$

gehören also die drei Berührungspunkte:

$$(2.)\quad \begin{cases} -\dfrac{u_0}{3}+\dfrac{(2p+3)K+qiK'}{3}, & -\dfrac{u_0}{3}+\dfrac{2pK+(2q+3)iK'}{3}, \\ & -\dfrac{u_0}{3}+\dfrac{(2p+3)K+(2q+3)iK'}{3}. \end{cases}$$

Dieselben liegen auf einer Geraden, da die Summe ihrer Argumente congruent mit $-u_0$ ist.

Man sieht, dass die Argumente (1.) ein System *Steiner*scher Punktenpaare für $n=3$, und dass die Argumente (2.) ein solches System für $n=6$ bilden. Man hat also insbesondere den Satz, dessen ersten Theil *Steiner* angegeben hat:

Je zwei Wendepunkte können die Schnittpunkte der geraden und ungeraden Seiten eines Steinerschen Sechsecks und jede zwei Berührungspunkte solcher Tangenten, die von verschiedenen Wendepunkten an die Curve gezogen sind, dergleichen Punkte für ein Steinersches Zwölfeck sein.

Aber hiermit hängt eine allgemeinere Eigenschaft der Wendepunkte zusammen. Man kann nämlich die Forderung stellen, dass von dem System der zu einem Punkte v (für beliebiges n) gehörigen Punkte w immer auf der Verbindungslinie zweier noch ein dritter liege. Es müssen sich dann zu p, q, p', q' immer zwei Zahlen p'', q'' bestimmen lassen, so dass

$$3v+\frac{2(p+p'+p'')K+2(q+q'+q'')iK'}{n} = -u_0,$$

oder es muss sein:

$$(3.)\quad \begin{cases} v \equiv -\dfrac{u_0}{3}+\dfrac{2(p_0K+q_0iK')}{3}-\dfrac{2(p+p'+p'')K+2(q+q'+q'')iK'}{3n} \\ \quad = -\dfrac{u_0}{3}+\dfrac{2(p_0K+q_0iK')}{3}-\dfrac{2(rK+siK')}{3n}. \end{cases}$$

Da nun der erste Theil der rechten Seite das Argument eines Wendepunkts ist, so hat man folgenden Satz:

Alle, und nur diejenigen Punkte v, welche mit einem Wendepunkt ein zur Zahl $3n$ gehöriges Punktenpaar bilden können, haben die Eigenschaft, dass die Verbindungslinie von irgend zwei Punkten, die mit v ein zur Zahl n gehöriges Punktenpaar bilden, die Curve in einem dritten Punkte schneiden, welcher mit v ein eben solches Punktenpaar bildet.

Die Systeme der zu solchen Punkten v gehörigen w bilden sehr interessante Systeme, als deren speciellster Fall das System der Wendepunkte erscheint. Die so entstehenden Punktsysteme sind verschieden nach der Natur der Zahlen n, r, s und zwar in folgender Weise. Ich will einen Punkt eines solchen Systems einen Punkt p, q nennen, insofern sein Argument die Form $v+\frac{2(pK+qiK')}{n}$ hat, wo v aus (3.) bestimmt ist. Sollen p, q; p', q'; p'', q'' auf einer Geraden liegen, so muss man haben:

$$p+p'+p'' \equiv r, \qquad q+q'+q'' \equiv s, \qquad (\text{mod. } n).$$

Wenn nun erstlich n durch 3 theilbar ist, aber nicht auch r und s, so können die Punkte p, q; p', q'; p'', q'' nie in *einen* Punkt zusammenfallen. Ist n nicht durch 3 theilbar, so kann man, und zwar auf *eine* Art

$$3p \equiv r, \qquad 3q \equiv s$$

machen; in jedem solchen Falle gehört also ein Wendepunkt zu dem Systeme. Ist endlich jede der Zahlen n, r, s durch 3 theilbar, so gehören sämmtliche 9 Wendepunkte zu dem System.

Ist ferner n ungerade, so bestehen die Congruenzen

$$p'+2p \equiv r, \qquad q'+2q \equiv s$$

so zusammen, dass jedem Punkt p', q' ein Punkt p, q und umgekehrt entspricht. In diesem Falle also kann man von jedem Punkte des Systems eine Tangente ziehen, deren Berührungspunkt dem Systeme angehört, und die Tangente in jedem Punkte des Systems geht noch durch einen andern. Ist dagegen n gerade, so gehört zwar zu jedem Punkt p, q ein Punkt p', q'. Aber umgekehrt gehört zu einem Punkte p', q' nur dann ein Punkt p, q, wenn $r-p'$, $s-q'$ gerade sind; dann aber gehören zu demselben auch noch die Punkte $p+\frac{n}{2}$, q; p, $q+\frac{n}{2}$; $p+\frac{n}{2}$, $q+\frac{n}{2}$. Es geht also zwar noch die Tangente in jedem Punkte des Systems durch einen andern, aber immer vier durch denselben, so dass überhaupt nur durch den vierten Theil aller Punkte Tangenten anderer Punkte hindurchgehen.

Es sind daher folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Sei n von der Form $6k \pm 1$. Zu dem System gehört *ein* Wendepunkt. Von jedem anderen der n^2 Punkte des Systems gehen ausser der Tangente im Punkte selbst und einer von ihm aus gezogenen anderen Tangente noch $\frac{n^2-3}{2}$ Gerade aus, auf deren jeder sich zwei Punkte des Systems befinden. Von dem Wendepunkt hingegen gehen $\frac{n^2-1}{2}$ solcher Geraden aus. Mithin befinden sich in dem System:

ein Wendepunkt;

n^2-1 Tangenten, deren jede noch durch einen Punkt des Systems geht, und deren Berührungspunkte die Punkte des Systems sind, den Wendepunkt ausgeschlossen;

$\frac{n^2-1 \,.\, n^2-2}{6}$ Gerade, deren jede durch drei Punkte des Systems geht.

2. Sei n von der Form $6k \pm 2$. Zu dem System gehört *ein* Wendepunkt. Alle n^2 Punkte haben die Eigenschaft, dass ihre Tangenten einen Punkt des Systems treffen; bei n^2-1 ist dieser von dem Berührungspunkte verschieden. Aber nur $\frac{n^2}{4}$ Punkte haben die weitere Eigenschaft, dass die Berührungspunkte der vier von ihnen an die Curve gezogenen Tangenten dem Systeme angehören; der Wendepunkt gehört zu diesen. Es gehen also von $\frac{3n^2}{4}$ Punkten noch $\frac{n^2-2}{2}$ Gerade aus, die zwei Punkte treffen; von $\frac{n^2}{4}-1$ gehen $\frac{n^2-6}{2}$ Gerade aus, und von einem, dem Wendepunkt, $\frac{n^2-4}{2}$ Gerade. In dem System befinden sich also:

ein Wendepunkt und die Berührungspunkte der drei von ihm an die Curve gezogenen Tangenten;

die n^2-4 Tangenten der übrigen Punkte, die sich zu vier in Punkten des Systems schneiden;

$\frac{n^2-1 \,.\, n^2-2}{6}$ Gerade, deren jede durch drei Punkte des Systems geht.

3. Sei n von der Form $6k+3$, und zwar:

a) r und s nicht beide durch 3 theilbar. Das System enthält keinen Wendepunkt; von jedem Punkte gehen $\frac{n^2-3}{2}$ Gerade aus, welche zwei andere Punkte des Systems treffen. Zu dem System gehören also:

die n^2 Tangenten der Punkte, deren jede durch einen anderen Punkt des Systems geht;

$\frac{n^2 \,.\, n^2-3}{6}$ Gerade, deren jede durch drei Punkte des Systems geht.

b) r und s beide durch 3 theilbar; der Ausgangspunkt bildet mit einem Wendepunkte ein zur Zahl n gehöriges Paar. Alle Wendepunkte gehören zu dem System. Von jedem Wendepunkte gehen noch $\frac{n^2-1}{2}$ Gerade nach je zwei anderen Punkten, von allen anderen Punkten nur $\frac{n^2-3}{2}$. Zu dem System gehören also:

alle Wendepunkte;

n^2-9 Tangenten, deren jede in einem der anderen Punkte berührt, und deren jede durch einen anderen dieser Punkte geht;

$\frac{9(n^2-1)+(n^2-3)(n^2-9)}{6} = \frac{n^4-3n^2+18}{6}$ Gerade, deren jede durch drei Punkte des Systems geht.

4. Sei n von der Form $6k$. Und zwar:

a) r und s nicht beide durch 3 theilbar. Kein Wendepunkt gehört dem System an; von $\frac{3n^2}{4}$ Punkten gehen $\frac{n^2-2}{2}$ Gerade nach je zwei anderen Punkten, von $\frac{n^2}{4}$ Punkten deren nur $\frac{n^2-6}{2}$. Das System enthält also:

die n^2 Tangenten der Punkte, die sich zu vier in einem Punkte des Systems treffen;

$\frac{n^2.n^2-3}{6}$ Gerade, deren jede durch drei Punkte des Systems geht.

b) r und s beide durch 3 theilbar. Alle Wendepunkte gehören zu dem System, also auch die 27 Berührungspunkte der von ihnen gezogenen Tangenten. Von jedem Wendepunkt gehen noch $\frac{n^2-4}{2}$ Gerade nach je zwei Punkten des Systems, von $\frac{n^2}{4}-9$ anderen Punkten $\frac{n^2-6}{2}$ Gerade, von den übrigen $\frac{3n^2}{4}$ aber $\frac{n^2-2}{2}$ Gerade. Zu dem System gehören also:

alle Wendepunkte und die 27 Berührungspunkte der von ihnen an die Curve gezogenen Tangenten;

n^2-36 andere Tangenten, deren je vier durch einen Punkt des Systems gehen;

$\frac{n^4-3n^2+18}{6}$ Gerade, deren jede durch drei Punkte des Systems geht.

Der einfachste Fall von 3.*b*), nämlich $n=3$, giebt das System der Wendepunkte selbst, und die 12 Geraden, welche durch dieselben gehen. Der einfachste Fall von 4.*b*), nämlich $n=6$ giebt das System der Wendepunkte zusammen mit den Berührungspunkten der von den Wendepunkten an die Curve gezogenen Tangenten. Dieses System enthält nach 4.*b*) 201 Gerade. Von diesen sind 12 die Geraden, auf denen die Wendepunkte liegen; 108

andere Gerade gehen durch je einen Wendepunkt und je zwei Berührungspunkte, endlich bleiben 81 Gerade übrig, auf welchen je drei Berührungspunkte liegen. So findet man die Sätze wieder, welche Herr *Hesse* (dieses Journal Bd. 36, p. 175) über die Lage dieser Punkte aufgestellt hat.

Ueberhaupt stehen die geometrischen Sätze der angeführten Abhandlung von *Hesse* schon deswegen mit den hier behandelten Gegenständen in genauem Zusammenhange, weil einige Resultate derselben die von Herrn *Aronhold* aufgestellte Zurückführung eines mit der Theorie der Curve dritter Ordnung zusammenhängenden Integrals auf ein elliptisches begründen helfen. In der That kann man einen grossen Theil der a. a. O. bewiesenen schönen Sätze aus unserer Fundamentalformel $u+u_1+u_2 \equiv -u_0$ fast ohne alles Weitere ableiten. Ich will dies an dem Satze noch darthun, welcher sich a. a. O. p. 152 findet:

Es lassen sich einer Curve dritter Ordnung nur drei Dreiecke einbeschreiben, deren Seiten durch drei auf der Curve gegebene in einer geraden Linie liegende Punkte gehen, und die Dreiecke gehören drei verschiedenen Systemen an.

Seien nämlich a, a_1, a_2 die gegebenen Punkte, so dass:

$$a+a_1+a_2 \equiv -u_0.$$

Die Ecken des gesuchten Dreiecks seien b, b_1, b_2. Dann hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2 &\equiv -u_0, \\ b+a_1+b_2 &\equiv -u_0, \\ b+b_1+a_2 &\equiv -u_0. \end{aligned}$$

Aus diesen mit der ersten zusammen folgt:

$$2(b+b_1+b_2) \equiv -2u_0;$$

und da die Punkte b nicht auf einer Geraden liegen sollen, so muss man haben:

$$b+b_1+b_2 \equiv -u_0+K, \quad \text{oder} \quad \equiv -u_0+iK', \quad \text{oder} \quad \equiv -u_0+K+iK'.$$

Bezeichnet also ε eine der Grössen K, iK', $K+iK'$, so kann man setzen:

$$b=a+\varepsilon, \qquad b_1=a_1+\varepsilon, \qquad b_2=a_2+\varepsilon.$$

Dies sind die allgemeinsten Auflösungen des Problems, der Curve ein Dreieck einzubeschreiben; und zwar bilden diese Dreiecke drei Systeme, je nachdem K, iK' oder $K+iK'$ für ε gesetzt wird. Wie man, wenn die a gegeben sind, mit Hülfe der Tangenten die betreffenden Dreiecke construirt, ist sofort ersichtlich.

§. 5.

Bedingung dafür, dass sechs Punkte der Curve auf einem Kegelschnitt liegen. Berührungskegelschnitte etc. Bemerkungen.

Von grösserer Wichtigkeit ist eine Reihe von Sätzen, deren Beweis sich sofort ergiebt, wenn man von unserm Fundamentalsatz über drei Punkte auf einer Geraden zu dem entsprechenden über sechs Punkte der Curve übergeht, welche auf einem Kegelschnitt liegen.

Seien a, a_1, a_2 drei Punkte der Curve, welche in einer Geraden liegen, so dass

$$a+a_1+a_2 \equiv -u_0.$$

Ziehen wir durch jeden dieser Punkte eine beliebige Gerade, und erhalten wir auf diesen die Punktenpaare b, b'; b_1, b_1'; b_2, b_2', so ist auch

$$a+b+b' \equiv -u_0,$$
$$a_1+b_1+b_1' \equiv -u_0,$$
$$a_2+b_2+b_2' \equiv -u_0,$$

und die neuen sechs Punkte sind ein System der allgemeinsten Art, welches gleichzeitig der Curve und einem Kegelschnitt angehören kann. Aus diesen Gleichungen und der vorigen aber ergiebt sich:

$$b+b_1+b_2+b'+b_1'+b_2' \equiv -2u_0;$$

und so hat man den merkwürdigen Satz:

Die Summe der Argumente, die zu sechs auf einem Kegelschnitte liegenden Punkten gehören, ist immer derselben Constanten gleich $(-2u_0)$ *oder congruent.*

Nehmen wir z. B. an, die Punkte b, b'; b_1, b_1'; b_2, b_2' fielen paarweise zusammen. Der Kegelschnitt berührt dann die Curve dritter Ordnung in drei Punkten, und man hat für die Berührungspunkte

$$2(b+b_1+b_2+u_0) \equiv 0,$$

oder $b+b_1+b_2-u_0$ congruent einer der Grössen

$$0, \quad K, \quad iK', \quad K+iK'.$$

Der erste Fall aber ist der Frage fremd, weil die Punkte b, b_1, b_2 dann auf einer Geraden liegen würden. *Es giebt also drei Systeme von Berührungskegelschnitten*, welche sich dadurch unterscheiden, dass zwischen den Argumenten beziehungsweise die Gleichungen gelten:

$$b+b_1+b_2 \equiv -u_0+K, \; b+b_1+b_2 \equiv -u_0+iK', \; b+b_1+b_2 \equiv -u_0+K+iK'.$$

Solche drei Systeme hat Herr *Hesse* a. a. O. gefunden.

Ist $b+b_1+b_2+b'+b_1'+b_2' \equiv -2u_0$, und $b+b_1+b_2 \equiv -u_0+\varepsilon$, wo ε eine der Grössen K, iK', $K+iK'$ ist, so hat man auch $b'+b_1'+b_2' \equiv -u_0+\varepsilon$, und so den von *Hesse* a. a. O. gegebenen Satz: *Legt man durch die Berührungspunkte eines Kegelschnitts einen neuen Kegelschnitt, so schneidet er die Curve noch in drei Punkten, in denen ein weiterer, demselben System angehöriger Kegelschnitt die Curve berührt.*

Soll der Kegelschnitt zweimal dreipunktig berühren, so muss $b=b_1=b_2$, $b'=b_1'=b_2'$, also

$$3(b+b') \equiv -2u_0,$$

oder

$$b+b' \equiv -\tfrac{2}{3}u_0+\frac{2(pK+qiK')}{3}$$

sein. Hiernach liegen die beiden Berührungspunkte stets mit einem Wendepunkt $\left(-\frac{u_0}{3}+\frac{4(pK+qiK')}{3}\right)$ in gerader Linie, wie bekannt.

Ich übergehe eine Menge weiterer Sätze dieser Art, welche sich aus diesem Princip ableiten lassen, und bemerke nur noch, dass auch der Zusatz von *Steiner* sich hierdurch sofort erledigt, dass nämlich die über die Polygone ausgesprochenen Sätze noch gelten, wenn an Stelle ihrer Seiten Kegelschnitte treten, welche durch drei feste Punkte der Curve hindurchgehen.

Aber auch die Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch Büschel von Geraden und Kegelschnitten gewinnt durch unsere Formel eine sehr einfache Darstellung. Seien b, b_1, b_2, b_3 vier feste Punkte, welche irgendwie auf der Curve gewählt werden. Die Punkte c, d, in welchen ein durch jene gelegter Kegelschnitt die Curve ausserdem schneidet, genügen dann der Gleichung:

$$c+d \equiv -(2u_0+b+b_1+b_2+b_3).$$

Die Gerade cd schneidet also die Curve immer in demselben Punkte p, welcher durch die Formel

$$(1.) \qquad p \equiv u_0+b+b_1+b_2+b_3$$

bestimmt ist. Und so hat man den Satz:

Ein Kegelschnittbüschel, dessen gemeinsame Punkte auf der Curve liegen, schneidet die Curve in Punktenpaaren, in denen auch ein Büschel von Geraden dieselbe schneidet. Der Scheitel des letztern Büschels bestimmt sich aus (1.) geometrisch so, dass man zwei der festen Punkte des Systems verbindet, die andern beiden ebenfalls, beide Linien zum Durch-

schnitt mit der Curve bringt, und die beiden Schnittpunkte verbindet. Die letzte Gerade schneidet die Curve in dem gesuchten Scheitel. (*Salmon*, treatise on higher plane curves, p. 133.)

Ich beschliesse diese Untersuchungen mit zwei Bemerkungen, welche mit dem Gegenstande nur lose zusammenhängen.

Wenn man die Gleichungen, welche die Ecken eines *Steiner*schen Polygons bestimmen, unmittelbar aufstellt, so gelangt man zu einem Systeme von Gleichungen, welches, wie es in der Geometrie oft vorkommt, in die Gestalt gebracht werden kann:

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad \varphi(\lambda_2, \lambda_3) = 0, \quad \ldots \quad \varphi(\lambda_{n-1}, \lambda_n) = 0, \quad \varphi(\lambda_n, \lambda_1) = 0.$$

Systeme dieser Art fallen unter die Classe derjenigen, von denen *Abel* (dieses Journal Bd. 5, p. 342) den Satz angegeben hat, dass ihre Lösung auf eine Gleichung von verhältnissmässig niedrigem Grade zurückgeführt werden kann. Der Beweis dieses *Abel*schen Satzes ist sehr einfach. Denn sind die Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n) &= 0, \\ \varphi(x_2, x_3, \ldots x_n, x_1) &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \varphi(x_n, x_1, \ldots x_{n-2}, x_{n-1}) &= 0, \end{aligned}$$

so kann man in denselben etwa x_1 als bekannt ansehen, und, indem man $x_3, x_4, \ldots x_n$ eliminirt, x_2 durch x_1 ausdrücken. Man gelangt dann zu einer Gleichung, welche x_2 durch x_1 rational darstellt; und da x_3 zu x_2 in derselben Beziehung, wie x_2 zu x_1, etc., so hat man:

$$x_2 = \Theta(x_1), \quad x_3 = \Theta(x_2), \quad \ldots \quad x_n = \Theta(x_{n-1}), \quad x_1 = \Theta(x_n).$$

Ist demnach $\Pi(x)$ die Endgleichung, welche man durch Elimination von $x_2, x_3, \ldots x_n$ aus dem gegebenen Systeme erhält, so ist die Gleichung

$$\frac{\Pi(x)}{\varphi(x, x, \ldots x)} = 0$$

eine derjenigen, welche *Abel* (dieses Journal Bd. 4) mit Hülfe einer Gleichung von niedrigerem Grade auflösen gelehrt hat. Dies ist der angeführte *Abel*sche Satz.

Aber es verdient bemerkt zu werden, dass nach der Natur der Function φ die angegebene Schlussfolgerung illusorisch werden kann. Es kann nämlich geschehen, dass die Elimination von $x_3, x_4, \ldots x_n$ aus dem gegebenen System nicht auf zwei verschiedene Gleichungen zwischen x_1 und x_2 führt *),

*) Allgemeiner, dass die Elimination von m der x auf Gleichungen für die übrigen führt, welche sich als von einander abhängig oder widersprechend ausweisen.

welche zur Bestimmung dieser Grössen dienen können, sondern dass man auf zwei Gleichungen kommt, welche dasselbe aussagen, oder welche einander widersprechen. Der letzte Fall führt dann auf eine Bedingung zwischen den Coefficienten, und wenn dieselbe erfüllt ist, bleibt eines der x völlig unbestimmt.

Merkwürdigerweise ist gerade dieser Fall in der Geometrie besonders häufig aufgetreten, wovon das Problem des einer Ellipse einbeschriebenen, einer andern umbeschriebenen Polygons ein berühmtes Beispiel bietet. Auch die in der obigen Untersuchung auftretenden Systeme gehören demselben Ausnahmefalle an.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf einige Punkte der Theorie der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung. Die Deduction der Lage der neun Wendepunkte aus dem einen Satz, dass die Verbindungslinie zweier immer durch einen dritten geht, pflegt entweder nicht strenge oder doch einigermassen umständlich ausgeführt zu werden. Man kann sie sehr einfach durchführen, wenn man schliesst, wie folgt. Nehmen wir drei Wendepunkte, welche in gerader Linie liegen. Von den 12 Geraden, welche überhaupt existiren müssen, gehen durch die Punkte dieser Geraden nur 10. Es muss daher zwei Gerade geben, welche durch keinen jener Punkte gehen. Nehmen wir eine derselben, so gehen durch die auf ihr und der vorigen liegenden Punkte eilf Gerade hindurch; demnach muss die zwölfte Gerade durch die drei Wendepunkte gehen, welche auf den ersten nicht liegen. So hat man ein Wendepunktsdreieck; und man hat deren vier, wenn man der Reihe nach mit denjenigen Geraden beginnt, welche sich in einem Wendepunkte durchschneiden. Wie sodann eine zweckmässige Bezeichnung der Wendepuukte sofort die Geraden und die Dreiecke erkennen lässt, ist oben bereits gezeigt worden. (§. 4.)

Betrachten wir nun ein Wendepunktsdreieck. Auf einer Seite desselben liegen die Wendepunkte a, a_1, a_2, auf der zweiten b, b_1, b_2, auf der dritten c, c_1, c_2. Die gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks seien A, B, C. Von c, c_1, c_2 aus gesehen ist die Reihe

$$C,\quad b,\quad b_1,\quad b_2,\quad A,$$

der Reihe nach perspectivisch mit:

$$C,\quad a,\quad a_1,\quad a_2,\quad B,$$
$$C,\quad a_1,\quad a_2,\quad a,\quad B,$$
$$C,\quad a_2,\quad a,\quad a_1,\quad B.$$

Die letzten drei Reihen sind also projectivisch; oder man hat den Satz:

Die Reihe, welche von zwei Ecken eines Wendepunktsdreiecks und von den auf derselben Seite liegenden Wendepunkten gebildet wird, ist projectivisch mit jeder Reihe, welche durch cyclische Vertauschung der letztern erhalten wird.

Man übersieht leicht, dass dieser Satz nur aussagt, es seien die Quotienten $\frac{Ca}{Ba}$, $\frac{Ca_1}{Ba_1}$, $\frac{Ca_2}{Ba_2}$ die verschiedenen dritten Wurzeln derselben Grösse. Es ist von Interesse, dass man bei dieser Gelegenheit auf eine geometrische Darstellung der imaginären Wurzeln geführt wird. Denkt man sich einen Punkt, etwa a gegeben, so wird a_1, a_2 dadurch völlig bestimmt; die eine Cubikwurzel ist gegeben, die andern sind vermöge eines Problems der synthetischen Geometrie zu finden. Man kann dies verallgemeinern und sagen: *Der synthetische Ausdruck des Problems, die verschiedenen n^{ten} Wurzeln einer Zahl zu finden, wenn eine derselben gegeben vorliegt, ist in folgendem Problem enthalten:*

Gegeben sind auf einer Geraden drei Punkte C, a, B. Man soll auf derselben $n-1$ andre Punkte a_1, a_2, ... a_{n-1} so finden, dass die Reihe C, a, a_1, ... a_{n-1}, B mit derjenigen projectivisch ist, welche durch cyclische Vertauschung der a aus ihr hervorgeht.

Giessen, den 27. September 1863.

Darstellung der Curven durch Krümmung und Torsion.

(Fortsetzung zu Bd. 60, pag. 182.)

(Von Herrn *R. Hoppe.*)

Indem ich in der citirten Abhandlung das Problem behandelte, aus zwei gegebenen Relationen zwischen dem Bogen, der Krümmung und der Torsion einer Curve deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten zu finden, leitete mich folgender Gesichtspunkt. Die Darstellung einer Curve durch zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten bestimmt ausser ihrer Gestalt auch ihre Lage im Raume. Aus ihnen kann man erst mittelst dreier Differentiationen und zweier Wurzelausziehungen zu denjenigen Grössen gelangen, welche unabhängig von der Lage die wesentlich unterscheidenden Merkmale der Curven bilden. Dieser Umstand erschwert sehr den Einblick in die Natur der Curven, indem letztere durch accidentelle Elemente in den Hintergrund gestellt wird, und das Festhalten an jener Ausdrucksform ist, wie mir scheint, grossentheils daran Schuld, dass die Theorie der Curven doppelter Krümmung bisher eine verhältnissmässig geringe Ausbildung erhalten hat. Eine der Natur des Gegenstandes angemessene Behandlung muss zuerst die unterscheidenden Elemente soviel als möglich isoliren, dann von den wesentlichsten ausgehend die mehr accidentellen nach einander hinzutreten lassen.

In der vorigen Abhandlung ist die Isolirung bereits weiter ausgeführt worden, als es die zunächst beabsichtigte Elimination der Lage erforderte. Letztere wird schon vollzogen, wenn man die Krümmung τ' und die Torsion ϑ' als zwei gegebene Functionen des Bogens s, alle anderen Grössen als durch diese bestimmt betrachtet. Es hat sich jedoch gezeigt, dass auch der Bogen sofort eliminirt wird, sobald man statt der beiden anderen Variabeln ihre Integrale, den Krümmungs- und Torsionswinkel, τ und ϑ, einführt, dass also statt zweier allgemeinen Functionen nur eine in den Grundformeln zurückbleibt. Indem wir jetzt die Gleichung zwischen τ und ϑ als oberstes unterscheidendes Merkmal der Curven ansehen, wollen wir sie die *specifische Gleichung* nennen. Demgemäss zerfällt die Theorie der Curven in zwei von einander unabhängige Theile: der erste, die Theorie der Krümmungen, hat

es nur mit Richtungen, der zweite, die Theorie der Bogen, nur mit Dimensionen nach schon bekannten Richtungen zu thun.

Im Folgenden will ich zuerst den Gegenstand der vorigen Abhandlung noch einmal aufnehmen, um der Darstellung einer Curve durch die aus der Integration der specifischen Gleichung hervorgehenden Grössen ihre entwickelte Form zu geben; dann ein Problem in Bezug auf die Bogen besprechen; endlich in Betreff der Abhängigkeit mehrer Curven einige Theoreme aufstellen. Zuvor noch einige Anordnungen.

Denkt man eine Curve durch Bewegung eines Punktes erzeugt, der selbst einem körperlichen System zugehört, sei dieses unveränderlich in sich oder gleichzeitigen relativen Bewegungen unterworfen, so eignet sich zur Darstellung der gesammten Bewegung die Annahme zweier Axensysteme, das eine im Raume, das andere an dem bewegten Systeme fest. Die ersteren Axen mögen Raumaxen, die letzteren begleitende Axen, und die sie verbindenden Ebenen Raumebenen und begleitende Ebenen heissen. Die Bewegung des Systems sei nun durch den Lauf der Curve derart vollständig bestimmt, dass die Tangente, die Binormale *) (d. i. die zur Schmiegungsebene senkrechte Normale) und die Hauptnormale die begleitenden Axen; die Normalebene, die Schmiegungsebene, und die, auf beiden senkrechte, rectificirende Ebene *) die begleitenden Ebenen bilden; eine Reihenfolge, die um der Vertauschungsfähigkeit der beiden ersten Axen willen gewählt worden ist, und im Folgenden vorausgesetzt werden soll. Der Anfangspunkt des begleitenden Systems kann in der Theorie der Krümmungen nicht der laufende Punkt der Curve sein, weil dieser mit dem Bogen variirt; es ist nöthig, ihn in einen festen Punkt des Raumes zu verlegen.

§. 1.

Transformationen der Differentialgleichung und Ausdruck der Richtungen der begleitenden Axen in Integralen derselben.

Bezeichnen, wie vorher, u, v, w die cos. der Richtungswinkel einer beliebigen Raumaxe gegen die begleitenden Axen, und man zerlegt die Gleichung

$$(10.) \qquad u^2+v^2+w^2 = 1$$

*) Zwei Benennungen, als deren Autoren in *Schells* allgemeiner Theorie der Curven doppelter Krümmungen *Saint-Venant* und *Lancret* angeführt werden.

in folgende zwei:

$$(11.)\qquad \begin{cases} u\cos\mu + w\sin\mu = 1, \\ u\sin\mu - w\cos\mu = iv, \end{cases}$$

so findet man durch Differentiation derselben gemäss den Formeln:

$$(12.)\qquad \partial u = w\,\partial\tau; \quad \partial v = -w\,\partial\vartheta; \quad \partial w = v\,\partial\vartheta - u\,\partial\tau$$

zunächst:

$$\partial\tau + \partial\mu = -i\,\partial\vartheta\sin\mu = (v\cos\mu - iw)\,\partial\vartheta.$$

Die fernere Substitution:

$$(13.)\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\mu = \frac{2}{r}\frac{\partial r}{\partial\tau}$$

giebt alsdann:

$$(14.)\qquad r'' + i\vartheta' r' + \tfrac{1}{4}r = 0,$$

wo die Accente die Differentiation nach τ andeuten — übereinstimmend mit Gleichung (7.) der vorigen Abhandlung.

Für jeden Specialwerth von r findet man leicht einen zweiten, indem man die Gleichung differentiirt, und

$$(15.)\qquad r' = q_1 e^{-i\vartheta}$$

setzt, was

$$(16.)\qquad q_1'' - i\vartheta' q_1' + \tfrac{1}{4}q_1 = 0$$

ergiebt. Sind jetzt r_1, q_1 die conjugirten Werthe zu r, q, so genügen r, q der Gleichung (14.) und r_1, q_1 der Gleichung (16.). Mit Anwendung der Gleichung (14.) findet man die Relationen:

$$(17.)\qquad r = -4(r'' + i\vartheta' r') = -4q_1' e^{-i\vartheta},$$

$$(18.)\qquad \begin{cases} r_1 = -4q' e^{i\vartheta}, \\ r_1' = q e^{i\vartheta} \end{cases}$$

und, indem man

$$(19.)\qquad q = nr$$

für r in Gleichung (14.) einführt, noch die folgende:

$$n''r + 2n'r' + i\vartheta' n' r = 0,$$

woraus nach Integration hervorgeht:

$$(20.)\qquad n' r^2 e^{i\vartheta} = -\frac{2}{a} = \text{const.}$$

Um nun die Grössen u, v, w unmittelbar in den Wurzeln der Gleichungen (14.), (16.) auszudrücken, kann man Gleichung (11.) folgendermassen schreiben:

$$w = \frac{1+u}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\mu + \frac{1-u}{2}\cot\tfrac{1}{2}\mu.$$

Nach den Gleichungen (13.), (15.), (17.) ist

$$\cot\tfrac{1}{2}u = \frac{r}{2r'} = -\frac{2q_1'}{q_1},$$

daher

$$\partial u = (1+u)\frac{\partial r}{r} - (1-u)\frac{\partial q_1}{q_1},$$

woraus weiter:

$$\partial\frac{1-u}{rq_1} = -\frac{2\partial r}{r^2 q_1} = -\frac{2\partial\tau}{r^2}e^{-i\vartheta} = a\,\partial n$$

und nach Integration:

$$(21.) \qquad 1-u = anrq_1 = aqq_1.$$

Jede Hinzufügung einer Constanten würde u im Allgemeinen imaginär machen. Die Constante a, welche nur von dem willkürlichen constanten Factor in q und q_1 herrührt, kann man $=1$ setzen, und dafür jenen Factor so bestimmen, dass den Gleichungen (15.), (17.), (19.), (20.) genügt wird, welche nach Elimination von n und r ergeben:

$$(22.) \qquad qq_1 + 4q'q_1' = 2.$$

Dass die linke Seite sich stets auf eine Constante reducirt, ist eine Eigenschaft aller Integrale der Gleichung (14.), und enthält keine neue Bedingung.

Gemäss den Formeln (12.) findet man nun die Werthe:

$$u = 1 - qq_1; \quad v = i(q'q_1 - qq_1'); \quad w = -(q'q_1 + qq_1'),$$

welche ohne weitere Bedingung die Gleichung (10.) erfüllen.

Zur Berechnung der entsprechenden Grössen u_1, v_1, w_1 in Bezug auf eine zweite Raumaxe wenden wir das vollständige Integral der Gleichung (14.)

$$Aq + Br$$

an, welches für q zu substituiren, und woraus gemäss der Gleichung (15.) die entsprechende Substitution für q_1 zu ermitteln ist. Damit beide Raumaxen zu einander senkrecht werden, müssen A und B der Gleichung

$$uu_1 + vv_1 + ww_1 = 0$$

genügen. Bezeichnen A_1, B_1 die conjugirten Werthe zu A, B, so findet man:

$$AA_1 = \tfrac{1}{2}; \quad BB_1 = \tfrac{1}{8}.$$

Setzt man

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}; \quad B = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i(\alpha+\beta)},$$

so geht α aus allen Formeln heraus, β bleibt willkürlich und erfüllt in Bezug

auf eine dritte Raumaxe die Bedingung

$$v_2 = uw_1 - u_1 w,$$

wenn man es entsprechend der zweiten und dritten $= 0$ und $= -\frac{1}{2}\pi$ setzt. Demnach ist in Bezug auf beide Axen

$$A = A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

in Bezug auf die zweite

$$B = B_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

in Bezug auf die dritte

$$B = -B_1 = \frac{i}{2\sqrt{2}}.$$

Das System der sämmtlichen neun Werthe gestaltet sich besonders einfach, wenn man setzt:

$$q = (m + im_1)e^{-\frac{1}{2}i\vartheta}; \quad q' = \tfrac{1}{2}(n - in_1)e^{-\frac{1}{2}i\vartheta}.$$

Dann sind

$$p = m + im_1; \quad p = n + in_1$$

die zwei Specialwerthe, welche der Gleichung

$$(23.) \qquad p'' + \tfrac{1}{4}(1 + \vartheta'^2 - 2i\vartheta'')p = 0$$

genügen, und zwar findet man den zweiten aus dem ersten mittelst der Formeln:

$$(24.) \qquad n = 2m' + \vartheta' m_1; \quad n_1 = -2m_1' + \vartheta' m.$$

Die Tabelle der Werthe lautet jetzt:

$$(25.) \qquad \begin{cases} u = 1 - m^2 - m_1^2 = n^2 + n_1^2 - 1, \\ v = mn_1 + m_1 n, \\ w = -mn + m_1 n_1, \\ u_1 = mn + m_1 n_1, \\ v_1 = mm_1 - nn_1, \\ w_1 = 1 - m^2 - n_1^2 = m_1^2 + n^2 - 1, \\ u_2 = mn_1 - m_1 n, \\ v_2 = 1 - m_1^2 - n_1^2 = m^2 + n^2 - 1, \\ w_2 = mm_1 + nn_1, \end{cases}$$

und der constante Factor der Integrale der Gleichung (23.) bestimmt sich durch die Gleichung:

$$(26.) \qquad 2 = m^2 + m_1^2 + n^2 + n_1^2.$$

§. 2.

Veränderung der Raumaxen.

Substituirt man für die erste Wurzel $m+im_1$ der Gleichung (23.), eine beliebige andere

$$a\,e^{i\alpha}(m+im_1)+b\,e^{i\beta}(n+in_1),$$

so geht gemäss der Gleichung (24.) $n+in_1$ über in

$$a\,e^{-i\alpha}(n+in_1)-b\,e^{-i\beta}(m+im_1),$$

und Gleichung (26.) giebt zunächst:

$$a^2+b^2 = 1.$$

Sei also

$$a=\cos\gamma;\quad b=\sin\gamma.$$

Führt man jetzt die Substitution in den Gleichungen (25.) aus, so erweist sich das Resultat als dasselbe, wie wenn die Raumaxen der x, y, z, auf welche sich die Werthe (25.) beziehen, in drei neue Raumaxen der x_1, y_1, z_1 übergehen, deren Lage im Verhältniss zu den erstern durch die Relationen

$$x_1 = x\cos 2\gamma - y\sin 2\gamma\cos(\alpha-\beta) - z\sin 2\gamma\sin(\alpha-\beta),$$

$$y_1 = x\sin 2\gamma\cos(\alpha+\beta)+y(\cos 2\alpha\cos^2\gamma-\cos 2\beta\sin^2\gamma)+z(\sin 2\alpha\cos^2\gamma+\sin 2\beta\sin^2\gamma).$$

$$z_1 = -x\sin 2\gamma\sin(\alpha+\beta)+y(-\sin 2\alpha\cos^2\gamma+\sin 2\beta\sin^2\gamma)+z(\cos 2\alpha\cos^2\gamma+\cos 2\beta\sin^2\gamma)$$

ausgedrückt ist, in welchen Formeln man nur für x, y, z erst u, u_1, u_2, dann v, v_1, v_2, dann w, w_1, w_2 zu schreiben braucht, damit x_1, y_1, z_1 die veränderten Werthe der gleichnamigen Grössen darstellen.

Hiermit ist zugleich bewiesen, dass die specifische Gleichung die Richtungen der begleitenden Axen vollständig bestimmt, wenn sie für irgend einen Punkt der Curve gegeben sind; oder, mit anderen Worten, dass die begleitenden Axen zweier Curven von derselben specifischen Gleichung, durch eine Drehung des ganzen Systems um den Anfangspunkt, im ganzen Verlaufe der Curven gleichzeitig zur Deckung gebracht werden können.

§. 3.

Construction einer Curve von gegebener specifischen Gleichung auf einer gegebenen Fläche.

Ist nur die specifische Gleichung einer Curve gegeben, also die absolute Lage des Gesammtsystems im Raume willkürlich, so lässt sich die noch unbestimmte Function s, welche in den Coordinatengleichungen

$$x=\int u\,\partial s;\qquad y=\int u_1\,\partial s;\qquad z=\int u_2\,\partial s$$

erscheint, unter Anderen dazu verwenden, dass die Curve in eine gegebene Fläche fällt. Legt man nämlich eine beliebige Tangente der Curve als Tangente an die Fläche an in einem Punkte, wo weder eine Unstetigkeit noch eine Krümmung $=0$ vorkommt, so kann man die unendlich nahe Tangente längs der ersteren so weit hingleiten lassen, bis sie gleichfalls die Fläche berührt. Der Abstand beider Berührungspunkte ist dann das gesuchte Bogenelement ∂s. Hierbei bleiben durch die freie Wahl des ersten Berührungspunkts, ferner der Anfangsrichtung längs der Berührungsebene, und der Stellung des um die Tangente drehbaren begleitenden Axensystems noch vier Constante zur Verfügung, deren eine demnach selbst nach bestimmter Integration der Differentialgleichung noch willkürlich ist.

Die analytische Ausführung reducirt sich auf eine Differentialgleichung erster Ordnung, die für einige Flächen unabhängig von der Curve integrabel ist. Sind p, p_1, p_2 die cos. der Richtungswinkel der Normale der Fläche, so hat man:

$$(27.) \qquad pu+p_1u_1+p_2u_2 = 0,$$

und kann daher setzen:

$$pv+p_1v_1+p_2v_2 = \sin h,$$
$$pw+p_1w_1+p_2w_2 = \cos h.$$

Differentiirt man alle drei Gleichungen nach s, so kommt:

$$(28.) \quad \begin{cases} U = p'u+p_1'u_1+p_2'u_2 = -\tau'\cos h, \\ V = p'v+p_1'v_1+p_2'v_2 = (h'+\vartheta')\cos h, \\ W = p'w+p_1'w_1+p_2'w_2 = -(h'+\vartheta')\sin h, \end{cases}$$

woraus sich folgende Ausdrücke des Bogenelements ergeben:

$$\partial s = T\partial\tau = -\frac{\partial\tau\cos h}{U} = -\frac{V\partial\tau}{U\sqrt{V^2+W^2}} = -\frac{V\partial\tau}{U\sqrt{p'^2+p_1'^2+p_2'^2-U^2}}.$$

Hier sind p', q', r', h, U, V, W Functionen von x, y, z und von bekannten Functionen von τ, also, nach Elimination von y und z mittelst der Gleichung (27.) und der Flächengleichung T, entwickelte Function von x und τ, und die Aufgabe reducirt sich auf die Integration der Gleichung:

$$\partial x = Tu\partial\tau.$$

Ist insbesondere eine Rotationsfläche gegeben, deren Gleichung sei

$$y^2+z^2 = 2\varphi x,$$

so erhält man nach zweimaliger Differentiation und Elimination von y und z:

$$\partial x = \frac{w\varphi' x \pm v\sqrt{2(1-u^2)\varphi x - u^2\varphi'^2 x}}{1-u^2(1+\varphi'' x)}\,\frac{u\partial\tau}{1-u^2}.$$

Zur Vereinfachung setze man

$$r^2 = 2\varphi x - \frac{u^2}{1-u^2}\varphi'^2 x,$$

dann ergiebt sich

$$\partial r = \varphi' x \frac{uv\partial\tau}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

eine Gleichung, welche die fertige Integration für den Fall eines Rotationsparaboloids enthält, indem hier $\varphi' x$ constant ist.

Die Gleichung jeder anderen Rotationsfläche zweiten Grades lässt sich in der Form schreiben:

$$y^2+z^2 = ax^2+b.$$

Setzt man nun

$$\partial\varrho = \frac{uv\partial\tau}{(1-u^2)\sqrt{1-(1+a)u^2}}; \quad x = t\sqrt{\frac{1-u^2}{1-(1+a)u^2}},$$

so gehen die drei vorigen Gleichungen über in

$$r^2 = at^2+b,$$

$$\frac{\partial r}{\partial\varrho} = at; \quad \frac{\partial t}{\partial\varrho} = r.$$

Das vollständige Integral der beiden letzten ist

$$t = ce^{\sqrt{a}\varrho}+c_1e^{-\sqrt{a}\varrho},$$

$$r = \sqrt{a}(ce^{\sqrt{a}\varrho}-c_1e^{-\sqrt{a}\varrho}),$$

und nach Einführung in die erste findet man:

$$4acc_1 = -b.$$

Setzt man, um dieser Relation zu genügen,

$$c = -c_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}},$$

so ergiebt sich

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{b}(e^{\sqrt{a}\varrho}+e^{-\sqrt{a}\varrho}),$$

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}(e^{\sqrt{a}\varrho}-e^{-\sqrt{a}\varrho})\sqrt{\frac{1-u^2}{1-(1+a)u^2}}.$$

Die aus der Flächengleichung und ihrer ersten Ableitung

$$u_1y+u_2z = aux,$$

entwickelten Werthe der beiden anderen Coordinaten lauten:

$$y = \frac{au\,u_1x}{1-u^2}+\frac{u_2r}{\sqrt{1-u^2}}; \quad z = \frac{au\,u_2x}{1-u^2}-\frac{u_1r}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Für die Kugelfläche

$$x^2+y^2+z^2 = c^2,$$

wo

$$U=\frac{1}{c}; \quad V=0; \quad W=0$$

ist, geht unmittelbar aus der Gleichung (28.) hervor:

$$h+\vartheta = \text{const.}, \quad \text{ex.gr.} = \pi,$$

und man hat:

$$\partial s = c\partial\tau\cos\vartheta.$$

§. 4.

Constante Drehung des begleitenden Axensystems um die Hauptnormale.

Es mögen jetzt u, v, w, ϑ, τ ihre Bedeutung in Bezug auf eine Curve behalten, und die gleichnamigen Grössen in Bezug auf eine zweite Curve, aber für dieselbe Raumaxe durch den Index 1 unterschieden sein. Zwischen ihnen sollen die Relationen stattfinden:

$$(29.) \quad \begin{cases} u_1 = u\cos\delta - v\sin\delta, \\ v_1 = u\sin\delta + v\cos\delta, \\ w_1 = w, \end{cases}$$

wo δ eine Constante bezeichnet. Dann erhält man durch Differentiation drei Gleichungen, deren letzte nur die beiden anderen bestätigt, und welche das von der Lage der Raumaxe völlig unabhängige Resultat liefern:

$$(30.) \quad \begin{cases} \vartheta_1 = \vartheta\cos\delta - \tau\sin\delta, \\ \tau_1 = \vartheta\sin\delta + \tau\cos\delta, \end{cases}$$

wo die willkürlichen constanten Incremente der vier Variabeln als selbstverständlich weggelassen worden sind. Demzufolge ist es gestattet, die angenommenen Relationen (29.) als für jede Raumaxe gültig zu betrachten, so dass das begleitende Axensystem der zweiten Curve aus dem der ersten durch eine constante Drehung um die Hauptnormale hervorgeht.

Geometrisch lässt sich das Resultat folgendermassen ausdrücken: Betrachtet man ϑ, τ als ebene Coordinaten eines Punktes bezüglich auf die der Tangente und Binormale der ersten Curve parallelen Axen, und trifft bei der zweiten Curve die entsprechende Anordnung, so ist der Punkt $(\vartheta\tau)$ identisch im Raume mit dem Punkte $(\vartheta_1\tau_1)$.

Betrachtet man diesen Punkt als fest am begleitenden Axensystem, so dass er nach seiner Erzeugung an dessen Bewegung theilnimmt, so beschreibt er eine bewegte Curve, welche die *Torsionslinie* heissen mag. Diese sowohl wie die absolut im Raume beschriebene Linie ist demnach beiden Curven gemein; ihre Lage zu den begleitenden Axen hingegen, mithin auch die specifische Gleichung, verschieden.

Setzt man umgekehrt voraus, dass zwei Curven congruente Torsionslinien haben, so folgt zunächst, dass es eine dritte Curve giebt, welche mit der ersten eine gemeinsame specifische Gleichung hat, und mit der zweiten durch die Relationen (29.) verbunden ist. Die begleitenden Axen der ersten und dritten Curve lassen sich dann nach §. 2 durch einmalige Drehung des ganzen Systems zur dauernden Deckung bringen. Das Ergebniss lautet:

Zwei Curven von congruenten Torsionslinien lassen sich stets so legen, dass in den entsprechenden Punkten ihre Hauptnormalen parallel werden, und ihre Tangenten constante Neigung gegen einander haben; und umgekehrt.

§. 5.

Eintheilung der Curven.

In Folge des letzten Satzes bildet die Torsionslinie das umfassendere Merkmal zur Eintheilung der Curven, nachdem diese nach ihrer specifischen Gleichung bereits zusammengefasst worden sind; und zwar hat diese neue Eintheilung besonders die Bedeutung, dass jede Speciallösung der Differentialgleichung (23.) das Anfangs gestellte Problem für alle Curven löst, welche durch dieselbe Torsionslinie charakterisirt sind. Vornehmlich in Rücksicht auf diejenigen Fälle, in denen sich die Lösungen entwickelt angeben lassen, und deren einige in der vorigen Abh. Abschn. IV. angeführt sind, kann man zunächst Curven von algebraischer und transcendenter Torsion unterscheiden, und unter den ersteren wiederum Curven von linearer, cyklischer, parabolischer, elliptischer und hyperbolischer Torsion als die einfachsten Fälle hervorheben.

Die Curven linearer Torsion enthalten alle ebenen Curven als speciellen Fall in sich. Lässt man nämlich die gerade Torsionslinie

$$\vartheta = \tau \operatorname{tg} \alpha$$

sich in ihrer Ebene drehen, so wird für $\alpha = 0$ die Curve eben. Dem Werthe $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ entspricht keine Curve; denn obgleich das begleitende Axensystem existirt, giebt es doch keine Umhüllungslinie der Tangente, weil diese beständig parallel bleibt. Der Grund, warum eine Krümmung $= 0$ bei endlicher

Torsion nicht vorkommen kann, liegt also nicht im Bereich der Theorie der Krümmungen, sondern der Bogen, in welcher letzteren allein Tangente und Binormale verschiedene Rollen haben.

Die Differentialgleichung (23.) hat hier constante Coefficienten, und liefert daher unmittelbar die bereits aufgeführten Werthe.

Die Curven cyklischer Torsion haben die Eigenthümlichkeit, dass eine constante Drehung des begleitenden Axensystems um die Hauptnormale keine Aenderung hervorbringt, weil die specifische Gleichung dieselbe bleibt. Ist die Gleichung der Torsionslinie

$$\vartheta^2+\tau^2 = c^2,$$

so lautet Gleichung (23.):

$$p''+\tfrac{1}{4}\Big(1+\frac{2i}{\sqrt{c^2-\tau^2}}\Big)\frac{c^2p}{c^2-\tau^2} = 0.$$

Zu ihrer Lösung führt der Umstand, dass ein constantes w den Gleichungen (12.) genügt. Aus den so erhaltenen Werthen von u, v, w kann man dann umgekehrt gemäss den Relationen von §. 1 den folgenden Doppelwerth von p finden:

$$p = \sqrt{1\pm\frac{\tau}{\sqrt{1+c^2}}}\,e^{\pm i\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+c^2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{c^2-\tau^2}}{\tau}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+c^2}\mp c}{\sqrt{c^2-\tau^2}}(c-\tau)\right)}.$$

Für parabolische Torsion wird, wenn

$$2k\vartheta = \tau^2$$

die specifische Gleichung ist, die Differentialgleichung:

$$p''+\tfrac{1}{4}\Big(\frac{\tau^2}{k^2}+1-\frac{2i}{k}\Big)p = 0.$$

Ihr genügt zuerst der Werth:

$$p = c\tau\int_0^1 e^{i\frac{1-2\omega}{4k}\tau^2}\frac{\partial\omega}{\sqrt{\omega}}\Big(\frac{1-\omega}{\omega}\Big)^{\frac{1}{8}ik},$$

aus dem dann nach der Gleichung (24.) der zweite

$$p = c\int_0^1 e^{-i\frac{1-2\omega}{4k}\tau^2}\frac{\partial\omega}{\sqrt{\omega}}\Big(\frac{1-\omega}{\omega}\Big)^{-\frac{1}{8}ik}\Big(2+\frac{i\tau^2\omega}{k}\Big)$$

hervorgeht. Den Werth der Constanten c, welcher der Gleichung (26.) genügt, findet man leicht, indem man $\tau=0$ setzt. Da alsdann die Integrale in Gammafunctionen darstellbar sind, so ergiebt sich nach bekannten Formeln:

$$c = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{e^{\frac{1}{4}k\pi}-e^{-\frac{1}{4}k\pi}}{k\pi}}.$$

Ist für elliptische und hyperbolische Torsion die specifische Gleichung

$$\frac{\vartheta^2}{a}+\frac{\tau^2}{b} = 1,$$

so lautet die Differentialgleichung:

$$p''+\tfrac{1}{4}\Big(b+\Big(\frac{a}{b}-1\Big)\tau^2+2i\sqrt{\frac{ab}{b-\tau^2}}\Big)\frac{p}{b-\tau^2}\;=\;0.$$

In dem besonderen Falle $a=-b$ kann man von der Gleichung der Torsionslinie in anderer Lage

$$\vartheta\tau\;=\;k$$

ausgehen, wo die Differentialgleichung, die alsdann lautet:

$$p''+\tfrac{1}{4}\Big(1+\frac{k^2}{\tau^4}-\frac{4ik}{\tau^3}\Big)p\;=\;0,$$

vielleicht eher Aussicht zur Lösung bietet.

§. 6.

Beliebige Drehung des begleitenden Axensystems.

Um das Theorem §. 4 zu verallgemeinern, seien statt der Relationen (29.) die folgenden

$$(31.)\qquad \begin{cases} u_1 \;=\; au+bv+cw, \\ v_1 \;=\; a_1u+b_1v+c_1w, \\ w_1 \;=\; a_2u+b_2v+c_2w, \end{cases}$$

gültig für jede Raumaxe, angenommen, wo die Coefficienten a, b, c, etc. Functionen von ϑ oder τ allein seien. Differentiirt man sie, drückt dann u_1, v_1, w_1 in u, v, w aus, und vergleicht die Coefficienten von u, v, w, so erhält man neun Gleichungen, deren sechs sich sogleich als Folge der drei übrigen erweisen, so dass nur die drei folgenden resultiren:

$$\begin{aligned} a_2\partial\vartheta_1 \;&=\; -\partial a_1+c_1\partial\tau, \\ a_2\partial\tau_1 \;&=\; \quad\partial a\;-c\,\partial\tau, \\ a_1\partial a+b_1\partial b+c_1\partial c \;&=\; a_2\partial\vartheta+b_2\,\partial\tau, \end{aligned}$$

welche durch die Substitutionen

$$\begin{aligned} a \;&=\; \cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta+\cos\beta_1\cos\beta, \\ b \;&=\; \cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta-\cos\beta_1\sin\beta, \\ c \;&=\; \sin\alpha\sin\beta_1, \\ a_1 \;&=\; \cos\alpha\cos\beta_1\sin\beta-\sin\beta_1\cos\beta, \\ b_1 \;&=\; \cos\alpha\cos\beta_1\cos\beta+\sin\beta_1\sin\beta, \\ c_1 \;&=\; \sin\alpha\cos\beta_1, \\ a_2 \;&=\; -\sin\alpha\sin\beta, \\ b_2 \;&=\; -\sin\alpha\cos\beta, \\ c_2 \;&=\; \cos\alpha \end{aligned}$$

in die folgenden übergehen:

$$(32.)\quad \begin{cases} \partial\vartheta_1 + \cos\beta_1\,\partial\alpha = a\,\partial\vartheta + b\,\partial\tau + c\,\partial\beta, \\ \partial\tau_1 - \sin\beta_1\,\partial\alpha = a_1\,\partial\vartheta + b_1\,\partial\tau + c_1\,\partial\beta, \end{cases}$$

$$(33.)\quad \partial\beta_1 = a_2\,\partial\vartheta + b_2\,\partial\tau + c_2\,\partial\beta.$$

Die letzte drückt die Bedingung aus, unter welcher die angenommenen Relationen möglich sind. Ist α constant, so erhält man:

$$\partial\vartheta_1^2 + \partial\tau_1^2 + \partial\beta_1^2 = \partial\vartheta^2 + \partial\tau^2 + \partial\beta^2 = \partial\sigma^2.$$

Zur geometrischen Darstellung des Resultats im letztgenannten Falle construire man eine Curve, welche durch die cos. der Richtungswinkel der Tangente

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}, \quad \frac{\partial\tau}{\partial\sigma}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial\sigma}$$

in Bezug auf die begleitenden Axen der ersten Curve und durch das Bogenelement $\partial\sigma$ bestimmt ist. Die entsprechende Anordnung in Bezug auf die zweite Curve führt absolut im Raume auf dieselbe Curve, wofern nur der willkürliche Anfang übereinstimmend angenommen wird. Die Coordinate in Bezug auf jede beliebige Raumaxe, auf welche sich auch die Grössen u, v, w, etc. zu beziehen haben, ist

$$x = \int(u\,\partial\vartheta + v\,\partial\tau + w\,\partial\beta) = \int(u_1\,\partial\vartheta_1 + v_1\,\partial\tau_1 + w_1\,\partial\beta_1).$$

Projicirt man nun die gemeinsame Curve auf die successiven rectificirenden Ebenen beider Urcurven, so erhält man auf denselben zwei stetige Reihen ebener Curven, welche einzeln von den Torsionslinien der Urcurven eingehüllt werden, indem sie in dem jeder rectificirenden Ebene entsprechenden Punkte eine gemeinsame Tangente haben; sowie umgekehrt die gemeinsame Curve die Schnitte der auf den beiden Torsionslinien als Leitlinien senkrecht zu den rectificirenden Ebenen errichteten Cylinderflächen einhüllt.

§. 7.

Begleitende Curven.

Von den zwei betrachteten Urcurven heisse die eine *begleitende Curve* der anderen, wenn zwischen den Coordinaten ihrer entsprechenden Punkte eine Gleichung der Form besteht:

$$x_1 = x + Pu + Qv + Rw,$$

gültig für jede Raumaxe, wo P, Q, R nur von ϑ oder τ und von s abhangen.

so dass die Ausdrücke von y_1 und z_1 dieselben Coefficienten haben. Die Bedingung lässt sich, wenn man ∂s als gegeben betrachtet, leichter erfüllen, indem man u, v, w in u_1, v_1, w_1 ausdrückt und schreibt:

$$x = x_1 + pu_1 + qv_1 + rw_1.$$

Dies differentiirt giebt:

$$u\partial s = (au_1 + a_1v_1 + a_2w_1)\partial s$$
$$= u_1(\partial s_1 + \partial p - r\partial\tau_1) + v_1(\partial q + r\partial\vartheta_1) + w_1(\partial r + p\partial\tau_1 - q\partial\vartheta_1),$$

woraus die drei Gleichungen hervorgehen:

$$a\partial s = \partial s_1 + \partial p - r\partial\tau_1,$$
$$a_1\partial s = \partial q + r\partial\vartheta_1,$$
$$a_2\partial s = \partial r + p\partial\tau_1 - q\partial\vartheta_1.$$

Da a, a_1, a_2 vom Bogenelement unabhängig sind, so erkennt man zunächst, dass s_1, p, q, r nur in linearer Form von s abhangen, im Uebrigen aber nur Functionen von ϑ oder τ enthalten dürfen. Von diesen vier Variabeln lässt sich eine als willkürlich betrachten, und zwar wählen wir die Grösse q, weil sich aus ihr die übrigen ohne neue Integration ergeben. Die allgemeinste Gleichung einer begleitenden Curve lautet alsdann:

$$x_1 = x - \left(\frac{q\partial\vartheta_1 + a_2\partial s}{\partial\tau_1} - \frac{\partial}{\partial\tau_1}\left(\frac{a_1\partial s - \partial q}{\partial\vartheta_1}\right)\right)u_1 - qv_1 - \frac{a_1\partial s - \partial q}{\partial\vartheta_1}w_1,$$

und ihr Bogen ist

$$s_1 = \int a\,\partial s + \int \frac{a_1\partial s - \partial q}{\partial\vartheta_1}\partial\tau_1 - \frac{q\partial\vartheta_1 + a_2\partial s}{\partial\tau_1} + \frac{\partial}{\partial\tau_1}\left(\frac{a_1\partial s - \partial q}{\partial\vartheta_1}\right),$$

woraus sich dann durch Differentiation nach τ_1 und ϑ_1 der Krümmungsradius und der reciproke Werth der Torsion ergeben. Mittelst der Gleichungen (31.), (32.) hat man u_1, v_1, w_1, $\partial\vartheta_1$, $\partial\tau_1$ in Elementen der Curve s auszudrücken.

§. 8.

Beispiele.

Specialisirt man die willkürlichen Functionen α, β, q, so entsprechen die einfachsten Werthe bekannten Abhängigkeitsarten der Curven, welche demnach sämmtlich nebst manchen anderen ihre gemeinsame Theorie in den Gleichungen (31.), (32.) etc. so weit erledigt finden, als sie durch die entwickelten Ausdrücke der hier betrachteten Stücke allein bedingt ist.

1. Für $\alpha = 0$; $\beta = \beta_1$; $q = c\sin\vartheta$ werden beide Curven parallel, c ihr constanter Abstand.

2. Für $\alpha = \pi;\ \beta + \beta_1 = -\frac{1}{2}\pi;\ q = 0$ wird die Curve s_1 die Einhüllende der Pollinien der Curve s.

3. Die inverse Abhängigkeitsart giebt für dieselben α, β, β_1 die Annahme:

$$q + \frac{\partial^2(q+s)}{\partial\tau^2} = 0,$$

woraus:

$$q = -\cos\tau\int\cos\tau\,\partial s - \sin\tau\int\sin\tau\,\partial s.$$

4. Setzt man statt dessen $q+s=0$, so werden beide Curven Evoluten einer und derselben dritten Curve, und zwar solche, dass der (unter allen Umständen constante) Winkel zwischen ihren Tangenten ein rechter ist.

5. Setzt man

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = \operatorname{tg}\lambda,$$

so wird für

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi;\quad \beta = \lambda - \tfrac{1}{2}\pi;\quad \beta_1 = -\tfrac{1}{2}\pi;\quad q = -s\sin\lambda$$

die Curve s_1 die Evolvente, und

6. für

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi;\quad \beta = \tfrac{1}{2}\pi;\quad \beta_1 = \tfrac{1}{2}\pi - \vartheta;\quad q = 0$$

die Evolute der Curve s.

7. für

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi;\quad \beta = \lambda - \tfrac{1}{2}\pi;\quad \beta_1 = 0;\quad q = 0$$

die Gratlinie ihrer rectificirenden Fläche, d. i. derjenigen abwickelbaren Fläche, welche die Durchschnittslinie der successiven rectificirenden Ebenen beschreibt.

8. Die inverse Abhängigkeitsart erhält man für

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}\pi;\quad \beta = 0;\quad \beta_1 = \tau - \tfrac{1}{2}\pi;\quad q = -\int\cos\tau\,\partial s.$$

Diese Beispiele lassen sich leicht verallgemeinern, indem man zu β oder β_1 eine Constante hinzufügt, d. h. eine gleichzeitige Drehung um die Hauptnormale bewirkt. Insbesondere werden dadurch die vier letzten Abhängigkeitsarten paarweise unter eine subsumirt.

Ich schliesse hieran einige allgemeinere Fragen an. Um aus den Gleichungen von §. 7 Resultate abzuleiten, die, wie die genannten Beispiele, auf jede Urcurve anwendbar sind, müssen α, β, β_1 als Functionen der unabhängigen Variabeln ϑ, τ bestimmt werden, mithin der Ausdruck (33.) von $\partial\beta_1$ in Bezug auf letztere ein Differential sein. Man kann nun die drei Dif-

ferentialgleichungen in folgende einfachere zerlegen:

$$\begin{aligned}
\partial p &= \partial\vartheta \sin\beta + \partial\tau \cos\beta,\\
\partial q &= \partial\vartheta \cos\beta - \partial\tau \sin\beta,\\
\partial\beta_1 &= -\partial p \sin\alpha + \partial\beta \cos\alpha,\\
\partial p_1 &= \partial p \cos\alpha + \partial\beta \sin\alpha,\\
\partial q_1 &= \partial q - \partial\alpha,
\end{aligned}$$

wo p_1, q_1 die entsprechende Bedeutung haben. Jetzt ist es leicht β und α so zu bestimmen, dass p Function von ϑ und τ, β_1 Function von p und β wird, und so eine, wenn gleich nicht die allgemeinste, Lösung zu gewinnen.

Eine weitere Frage ist: Wann sind auch ϑ_1 und τ_1 Functionen von ϑ und τ? Schreibt man die Gleichungen (32.) wie folgt:

$$\partial\vartheta_1 = m\,\partial\vartheta + n\,\partial\tau; \qquad \partial\tau_1 = m_1\,\partial\vartheta + n_1\,\partial\tau,$$

so findet man mit Anwendung der Gleichung (33.):

$$\frac{\partial n}{\partial\vartheta} - \frac{\partial m}{\partial\tau} = \sin\alpha \sin\beta_1; \qquad \frac{\partial n_1}{\partial\vartheta} - \frac{\partial m_1}{\partial\tau} = \sin\alpha \cos\beta_1 .$$

Demnach ist der in §. 4 betrachtete Fall $\sin\alpha = 0$ der einzige, in welchem zwei primitive Gleichungen zwischen den vier Variabeln existiren.

Ferner wollen wir fragen: Unter welchen Bedingungen können die begleitenden Axen beider Curven ein unveränderliches System bilden? Setzt man α, β, β_1 constant, so erhält man entweder $\sin\alpha = 0$ oder

$$\partial\vartheta \sin\beta + \partial\tau \cos\beta = 0; \qquad \partial\vartheta_1 \sin\beta_1 + \partial\tau_1 \cos\beta_1 = 0.$$

Der erste Fall ist schon bekannt; der zweite enthält eine neue Eigenschaft der Curven von linearer Torsion, nämlich folgende:

Je zwei Curven von linearer Torsion lassen sich durch blosse Drehung um zwei beliebige entsprechende Hauptnormalen in eine solche Lage bringen, dass ihre begleitenden Axen sämmtlich constante Winkel mit einander bilden. Umgekehrt folgt aus der Unveränderlichkeit dieser Winkel, dass die Torsion beider Curven linear ist, ausgenommen, wenn ihre Hauptnormalen parallel sind.

§. 9.

Relative Torsionslinie.

Die Gleichungen (31.) lassen sich für constante Coefficienten erfüllen, wenn man ihre Gültigkeit auf eine bestimmte Raumaxe beschränkt. Alsdann werden natürlich ϑ_1 und τ_1 abhängig von u, v, w. Die Differentiation ergiebt

nur zwei unabhängige Gleichungen, nämlich:

$$w_1 \partial \tau_1 = w(a\,\partial\tau - b\,\partial\vartheta) + c\,(v\,\partial\vartheta - u\,\partial\tau),$$
$$-w_1 \partial \vartheta_1 = w(a_1 \partial\tau - b_1 \partial\vartheta) + c_1(v\,\partial\vartheta - u\,\partial\tau).$$

Vergleicht man die Coefficienten von u, v, w und setzt

$$(34.)\quad \begin{cases} \Theta + \vartheta = a\vartheta_1 + a_1\tau_1, \\ T + \tau = b\vartheta_1 + b_1\tau_1, \\ \Delta = c\vartheta_1 + c_1\tau_1, \\ -\Delta_1 = a_2\vartheta + b_2\tau, \end{cases}$$

so erhält man:

$$w_1 \partial\Theta = u\,\partial\Delta_1; \qquad w_1 \partial T = v\,\partial\Delta_1; \qquad w_1 \partial\Delta = w\,\partial\Delta_1$$

oder

$$\partial\Theta : \partial T : \partial\Delta = u : v : w.$$

Sind nun Θ, T, Δ in Bezug auf die begleitenden Axen der Curve s die Coordinaten eines Punkts, der nach seiner Erzeugung an der Bewegung des begleitenden Axensystems theilnimmt, so beschreibt derselbe eine bewegte Curve, deren Bogen $= \Sigma$ sei.

Die erste Eigenschaft dieser Curve ist, dass ihre Tangente beständig die Richtung der Raumaxe hat.

Ferner wird sie gemäss den Gleichungen (34.) identisch mit der Torsionslinie der Curve s_1, wenn man den Anfangspunkt der Θ, T, Δ in den Punkt $(\vartheta\tau)$ verlegt, und identisch mit der Torsionslinie der Curve s, wenn man Θ, T, Δ in entgegengesetzten Richtungen vom Punkte $(\vartheta_1\tau_1)$ an rechnet. Man kann sie demnach die *relative Torsionslinie* beider Curven nennen.

Wir denken sie als eine bewegte Curve derart, dass jeder ihrer Punkte bei seiner Erzeugung in den gleichzeitigen Punkt $(\vartheta_1\tau_1)$ fällt, von da an aber an der Bewegung eines Axensystems theilnimmt, welches die Richtungen des begleitenden Axensystems der Curve s und den Anfangspunkt $(\vartheta\tau)$ hat. Sind σ und σ_1 die Bogen der beiden Torsionslinien, und bezeichnen die Accente die Differentiation nach dem zugehörigen Bogen, so ist

$$(35.)\qquad \Theta' = u; \quad T' = v; \quad \Delta' = w.$$

Seien ferner α, α_1, β die Winkel, welche die Tangenten von σ und σ_1 einzeln mit der Tangente von Σ, und unter einander bilden; dann ist

$$\cos\alpha = u\vartheta' + v\tau' = \Theta'\vartheta' + T'\tau',$$
$$\cos\alpha_1 = u_1\vartheta_1' + v_1\tau_1',$$
$$\cos\beta = \vartheta'(a\vartheta' + b\tau') + \tau'(a_1\vartheta' + b_1\tau'),$$

daher nach den Gleichungen (34.) und (35.)

$$\begin{aligned}\cos\alpha\,\partial\Sigma &= \vartheta'\,\partial\Theta+\tau'\,\partial T\\ &= \vartheta'\left((a\vartheta_1'+a_1\tau_1')\,\partial\sigma_1-\vartheta'\,\partial\sigma\right)+\tau'\left((b\vartheta_1'+b_1\tau_1')\,\partial\sigma_1-\tau'\,\partial\sigma\right)\\ &= \cos\beta\,\partial\sigma_1-\partial\sigma,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha_1\,\partial\sigma_1 &= u_1\,\partial\vartheta_1+v_1\,\partial\tau_1\\ &= (a\Theta'+b\,T''+c\Delta')\,\partial\vartheta_1+(a_1\Theta'+b_1\,T''+c_1\Delta')\,\partial\tau_1\\ &= \Theta'(\Theta'\,\partial\Sigma+\vartheta'\,\partial\sigma)+T''(T''\,\partial\Sigma+\tau'\,\partial\sigma)+\Delta''^2\,\partial\Sigma\\ &= \partial\Sigma+\cos\alpha\,\partial\sigma.\end{aligned}$$

Diesen zwei Gleichungen zufolge lässt sich aus den Seiten $\partial\sigma_1$, $\partial\sigma$, $\partial\Sigma$ ein Dreieck bilden, dessen entsprechende Winkel $\pi-\alpha$, α_1, β sind, und da die Bogenelemente in ihrer natürlichen Lage dieselben Winkel einschliessen, die Endpunkte von $\partial\sigma_1$ und $\partial\Sigma$ auch zusammenfallen, so entsteht das Dreieck durch blosse parallele Verschiebung von $\partial\sigma$. Hieraus folgt zunächst:

$$\alpha = \alpha_1+\beta,$$

$$\partial\sigma_1 : \partial\sigma : \partial\Sigma = \sin\alpha : \sin\alpha_1 : \sin\beta.$$

Aus den cos. der Richtungswinkel der Tangenten von Σ und σ, nämlich u, v, w einerseits und ϑ', τ', 0 andererseits, ergeben sich ferner folgende Werthe für die der Normale der Dreiecksebene:

$$\frac{w\tau'}{\sin\alpha},\quad -\frac{w\vartheta'}{\sin\alpha},\quad \frac{v\vartheta'-u\tau'}{\sin\alpha},$$

oder nach den Gleichungen (12.):

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial u}{\partial\sigma},\quad \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial v}{\partial\sigma},\quad \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial w}{\partial\sigma},$$

das sind die der Hauptnormale der relativen Torsionslinie. Zugleich muss der Krümmungsradius der letzteren

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial\Sigma}{\partial\sigma} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin\alpha_1}$$

sein. *Die Dreiecksebene ist also die rectificirende Ebene der relativen Torsionslinie.*

Die cos. der Richtungswinkel der Binormale, insofern diese in dieser Ebene liegt, und von der Tangente des Bogens σ um $\alpha+\frac{1}{2}\pi$ absteht, haben demnach folgende Werthe:

$$\frac{\vartheta'-u\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \frac{\tau'-v\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad -w\cot\alpha.$$

Aus dem letzten ergiebt sich folgender Ausdruck der Torsion:

$$\frac{\partial(w\cot\alpha)}{\partial w}\sin\alpha\frac{\partial\sigma}{\partial\Sigma} = \left(\cos\alpha + w\frac{\partial\cos\alpha}{\sin^2\alpha\,\partial w}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial\Sigma}$$
$$= \left(\cos\alpha + \frac{w}{\sin^2\alpha}\frac{u\partial\vartheta' + v\partial\tau'}{\partial w}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial\Sigma}$$
$$= \left(\cos\alpha + \frac{w}{\sin^2\alpha}\frac{v\vartheta' - u\tau'}{\partial w}\frac{\partial\tau'}{\vartheta'}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial\Sigma}$$
$$= \left(\cos\alpha + \frac{w}{\sin^2\alpha}\frac{\tau''}{\vartheta'}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial\Sigma}.$$

Demnach sind die Werthe des Krümmungs- und Torsionswinkels:

$$\int\sin\alpha\,\partial\sigma,\quad \int\cos\alpha\,\partial\sigma + \int\frac{w}{\sin^2\alpha}\frac{\partial\tau'}{\vartheta'}.$$

Obgleich die vorstehenden Rechnungen nur auf einer Lagenbestimmung durch eine einzige Raumaxe basiren, so ist doch die gegenseitige Lage der begleitenden Axensysteme der Curven s und s_1 bis auf eine Constante bestimmt, und lässt sich sehr einfach darstellen. Bezeichnet man durch die oberen Indices 1 und 2 die Grössenwerthe, welche sich auf die beiden anderen rechtwinkligen Raumaxen beziehen, und durch U_1, V_1, W_1 und U_2, V_2, W_2 die durch Substitution von $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $w^{(1)}$ und $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$ für u, v, w veränderten Werthe von u_1, v_1, w_1, so muss sein

$$u_1^{(1)} = U_1\cos\varphi - U_2\sin\varphi;\quad u_1^{(2)} = U_1\sin\varphi + U_2\cos\varphi,$$
$$v_1^{(1)} = V_1\cos\varphi - V_2\sin\varphi;\quad v_1^{(2)} = V_1\sin\varphi + V_2\cos\varphi,$$
$$w_1^{(1)} = W_1\cos\varphi - W_2\sin\varphi;\quad w_1^{(2)} = W_1\sin\varphi + W_2\cos\varphi,$$

wo φ eine unbekannte Variable bezeichnet. Differentiirt man die Gleichungen für $u_1^{(1)}$ und $u_1^{(2)}$, und eliminirt $\partial\tau_1$, so gehen alle auf die zwei neuen Raumaxen bezüglichen Grössen von selbst weg, und man behält bloss:

$$u_1 w_1\partial\varphi = -u_1(a_2\partial\vartheta + b_2\partial\tau),$$

woraus:

$$\partial\varphi = \frac{\partial\Delta_1}{w_1} = \frac{\partial\Delta}{w} = \partial\Sigma.$$

Um also die Lage des begleitenden Axensystems der Curve s_1 zu erhalten, braucht man nur ein rechtwinkliges Axensystem, welches die durch die Gleichung (31.) ausgedrückte unveränderliche Lage gegen die begleitenden Axen der Curve s hat, um die erste Raumaxe zu drehen, und zwar ist der Drehungswinkel

$$\varphi = \Sigma + \text{const.},$$

nach welcher Seite hin? ersieht man am besten aus den Formeln.

Berlin, den 19. September 1863.

Sur les hyperboloïdes de rotation qui passent par une cubique gauche donnée.

(Par M. *L. Cremona* à Bologne.)

Commençons par rappeler quelques propriétés des coniques planes.

1. Si plusieurs coniques se touchent mutuellement en deux points fixes, l'involution formée par les couples de points communs aux coniques et à une transversale arbitraire, a un point double sur la corde de contact; car celle-ci comptée deux fois représente une conique (du système) tangente à la transversale. D'où il suit que:

„Si l'on cherche une conique passant par deux points donnés s', s'' et „ayant un double contact avec une conique donnée C, la corde de contact „passera par l'un ou par l'autre des points doubles a, α de l'involution déter- „minée par les couples $s's''$, $l'l''$; où $l'l''$ sont les points communs à la conique „C et à la droite $s's''$."

2. Ces points doubles sont imaginaires seulement dans le cas que, les points $s's''$, $l'l''$ étant tous réels, les segments $s's''$, $l'l''$ empiètent en partie l'un sur l'autre; c'est-à-dire dans le cas que des deux points $s's''$ l'un soit intérieur et l'autre extérieur à la conique C, supposée réelle.

3. Si la conique cherchée doit contenir un troisième point s, menons ss'' qui rencontre C en mm'', et cherchons les points doubles b, β de l'involution (ss'', mm''); la corde de contact passera par b ou par β. Donc cette corde sera l'une des quatre droites ab, $\alpha\beta$, $a\beta$, αb. Si ab, $\alpha\beta$ s'entrecoupent en c, et $a\beta$, αb en γ, il est évident que c, γ sont les points doubles de l'involution déterminée par ss' et par les points nn', où C est rencontrée par la droite ss'.

„Ainsi, si l'on cherche à décrire une conique qui passe par trois points „donnés $ss's''$ et qui soit doublement tangente à une conique donnée C, le „problème admet quatre solutions. Les quatre cordes de contact forment un „quadrilatère complet, dont les diagonales sont les droites $s's''$, $s''s$, ss'."

4. Il est d'ailleurs évident que, si les points $ss's''$ sont tous réels, les quatre cordes de contact sont toutes réelles, ou toutes imaginaires. On obtient le premier cas, si la conique C est imaginaire (bien entendu qu'elle

soit toujours l'intersection d'une surface réelle du second ordre par un plan réel), ou bien si les points $ss's''$ sont tous intérieurs ou tous extérieurs à la conique C supposée réelle (2.).

5. Si les points $s's''$ sont imaginaires (conjugués), et s réel (la conique C étant réelle ou imaginaire), les points $b\beta c\gamma$ seront aussi imaginaires: b conjugué à γ, et c à β. Donc il y aura deux cordes réelles seulement, $b\gamma$ et $c\beta$.

6. Il est superflu d'ajouter que les coniques correspondantes à des cordes réelles sont toujours réelles, encore que la conique donnée C soit imaginaire. Le pôle d'une droite réelle par rapport à une conique imaginaire est réel; donc le problème revient à décrire une conique par trois points donnés (dont l'un au moins soit réel, les deux autres étant imaginaires conjugués), de manière qu'une droite donnée (réelle) ait son pôle en un point donné (réel).

7. Si les deux points $s's''$ appartiennent à la conique donnée C, le probleme admet une solution unique, c'est-à-dire une conique tangente à C en s', s'', et passant par s.

8. Si les deux points $s's''$ sont infiniment voisins sur une droite donnée S, c'est-à-dire si la conique cherchée, par-dessus le double contact avec C, doit être tangente à S en s' et passer par s, la corde de contact passera par le point a conjugué harmonique (sur S) de s' par rapport à C: et de plus elle passera par l'un des points c, γ doubles dans l'involution déterminée par la couple ss' avec les points où la conique C est rencontrée par la droite ss'. Donc le problème admet deux solutions, correspondantes aux cordes ac, $a\gamma$.

9. Supposons enfin que les trois points $ss's''$ soient infiniment proches dans une conique donnée Z, c'est-à-dire que l'on cherche une conique qui, par-dessus le double contact avec C, soit osculatrice à une autre conique donnée Z en un point donné s. Soit S la droite tangente à Z en s; et soit a le point de S qui est conjugué harmonique de s par rapport à C. On a déjà vu (8.) que, si une conique doit toucher S en s et avoir un double contact avec C, la corde de contact passe par a. Observons de plus que, si l'on mène par a deux sécantes arbitraires, les quatre points où ces droites rencontrent C appartiennent à une conique touchée par S en s. Mais, si l'on veut que cette conique soit osculée par Z en s, les sécantes cessent d'être toutes les deux arbitraires; plutôt, chacune d'elles détermine l'autre, si bien qu'elles, en variant ensemble, engendreront un faisceau en involution. Evi-

demment la droite S est un rayon double de ce faisceau (et la conique correspondante est la même droite S, comptée deux fois); donc l'autre rayon double sera la corde de contact de C avec la conique (unique) qui oscule Z en s et a un double contact avec C.

10. Ces propriétés ont une application immédiate à la recherche des surfaces du second degré (hyperboloïdes) de rotation, passant par une cubique gauche donnée.

Toute surface du second degré passant par la cubique gauche est coupée par le plan à l'infini suivant une conique circonscrite à un triangle fixe, dont les sommets $ss's''$ sont les points à l'infini de la cubique; et réciproquement toute conique passant par $ss's''$ est la trace à l'infini d'une surface du second degré qui contient la cubique gauche.

Si la surface du second degré doit être de rotation, sa trace à l'infini aura un double contact avec le cercle imaginaire C, intersection d'une sphère arbitraire par le plan à l'infini; et la corde de contact sera la trace des plans (cycliques) des cercles parallèles. Ainsi la recherche des surfaces du second degré de rotation, passant par la cubique gauche, est réduite à la détermination des coniques circonscrites au triangle $ss's''$ et doublement tangentes au cercle imaginaire C.

11. Si la cubique gauche a trois asymptotes réelles et distinctes *(hyperbole gauche)*, les points $ss's''$ sont eux-mêmes réels et distincts; donc (3. 4):

Par l'hyperbole gauche passent quatre hyperboloïdes (réels) *de rotation.*

Si par un point arbitraire de l'espace on mène six droites (perpendiculaires deux à deux) *bissectrices des angles des asymptotes, ces droites* (arêtes d'un angle tétraèdre complet, dont chacun plan diagonal est parallèle à deux asymptotes) *sont situées, trois à trois, dans quatre plans qui représentent les directions des sections circulaires des quatre hyperboloïdes de rotation.*

12. Si deux asymptotes coïncident en se réduisant à une droite unique S à l'infini (c'est le cas de *l'hyperbole parabolique gauche*), aussi deux points $s's''$ se réduisent à un seul point s' sur S. Donc (8.):

Par l'hyperbole parabolique gauche passent deux hyperboloïdes (réels) *de rotation. Les plans cycliques de ces surfaces sont tous parallèles à une même droite située dans la direction des plans asymptotiques* (tangents à la cubique à l'infini) *et perpendiculaire à la direction du cylindre hyperbolique qui passe par la courbe. Ces mêmes plans cycliques sont en outre respective-*

ment parallèles à deux droites perpendiculaires, dont les directions divisent en parties égales l'angle des deux cylindres, parabolique et hyperbolique, passant par la courbe.

13. Si la cubique gauche a une seule asymptote réelle (*ellipse gauche*), deux points $s's''$ deviennent imaginaires (conjugués); donc (5.):

Par l'ellipse gauche passent deux hyperboloïdes (réels) *de rotation* (les deux autres étant imaginaires).

Ici les directions des sections circulaires sont déterminées, comme pour l'hyperbole gauche (11.), par les faces d'un tétraèdre complet qui, dans le cas actuel, n'a que deux arêtes réelles perpendiculaires et deux faces réelles passant par l'une des arêtes susdites.

14. Si l'ellipse gauche a deux points sur le cercle imaginaire à l'infini (7.), on a la propriété suivante:

Si les surfaces du second degré passant par la cubique gauche ont une série commune de plans cycliques, il n'y en a qu'une seule qui soit de rotation.

15. Si la cubique gauche est osculée par le plan à l'infini (*parabole gauche*), les coniques, suivant les quelles ce plan coupe les surfaces du second degré passant par la courbe, s'osculent entr'elles en un même point, qui appartient à la cubique, et en ce point elles ont pour tangente commune la droite tangente à la courbe gauche. Parmi ces surfaces considérons celles, en nombre infini, qui ont un axe principal parallèle à la direction des plans asymptotiques et perpendiculaire à la direction du cylindre qui passe par la courbe (9.). En concevant ces axes transportés parallèlement à eux-mêmes et réunis ensemble, si bien qu'on aura un seul axe, les couples de plans cycliques passant par cet axe et correspondans aux surfaces individuelles formeront un faisceau en involution: dont un plan double est asymptotique à la cubique. *L'autre plan double de l'involution représentera la direction des sections circulaires de l'hyperboloïde* (unique) *de rotation, passant par la parabole gauche.*

Bologne, octobre 1863.

Ueber die Bewegung der Electricität in Leitern, mit Bezugnahme auf die Abhandlung des Herrn *G. Roch:* Anwendung der Potentialausdrücke auf die Theorie der molekularphysikalischen Fernewirkungen und der Bewegung der Electricität in Leitern im 61sten Bande dieses Journals pag. 283.

(Von Herrn *J. Weingarten.*)

Im 61sten Bande dieses Journals pag. 305 ist für die Bewegung der Electricität in Leitern ein Gleichungssystem entwickelt, welches der Berichtigung bedarf.

Bekanntlich hat *Kirchhoff* im 102ten Bande von *Poggendorffs* Annalen pag. 531 die Gleichungen für die Componenten u, v, w der Stromdichtigkeiten der im Innern ruhender Leiter bewegten Electricität in folgender Form gegeben:

$$(1.)\quad \begin{cases} u = -2k\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial x} + \dfrac{4}{c^2}\dfrac{\partial U}{\partial t}\right), \\ v = -2k\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial y} + \dfrac{4}{c^2}\dfrac{\partial V}{\partial t}\right), \\ w = -2k\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial z} + \dfrac{4}{c^2}\dfrac{\partial W}{\partial t}\right), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = -\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ \text{nebst der Bedingung:} \\ u\cos\lambda + v\cos\mu + w\cos\nu = -\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial e}{\partial t}, \end{cases}$$

in denen

$$\Omega = \iiint \frac{\varepsilon'\,dx'\,dy'\,dz'}{r} + \iint \frac{e'\,d\sigma}{r}$$

das Potential der gesammten freien Electricität des Leiters zur Zeit t; U, V, W aber die Integrale:

$$U = \int d\tau\,(x-x')\left[u'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}+v'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}+w'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right],$$

$$V = \int d\tau\,(y-y')\left[u'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}+v'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}+w'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right],$$

$$W = \int d\tau\,(z-z')\left[u'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}+v'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}+w'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right],$$

bedeuten. Die Integrationen erstrecken sich über das ganze Volumen des betrachteten Leiters, und es bezeichnet in ihnen $d\tau$ das Volumenelement $dx'\,dy'\,dz'$, während ein unbestimmtes Element der begrenzenden Oberfläche durch $d\sigma$ bezeichnet ist. Die letzte der Gleichungen (1.) bezieht sich auf jeden Punkt dieser Oberfläche, und die in ihr enthaltenen Winkel sind die, welche die nach Innen gerichtete Normale mit den Axen bildet.

Kirchhoff selbst hat in der genannten Abhandlung den Weg angegeben, auf welchem man aus diesen Gleichungen zur Bildung von Differentialgleichungen gelangt, welchen die durch die Gleichungen (1.) bestimmten Functionen u, v, w, ε im ganzen Innern des Leiters zu genügen haben. Es ist nur die Methode der theilweisen Integration, welche *Kirchhoff* zur Transformation der Summe $\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}$ angewandt hat, auch auf jedes der Integrale U, V, W zu übertragen. Bemerkt man, dass z. B. U sofort in die Form

$$U = \int d\tau\left[\frac{\partial\frac{x-x'}{r}u'}{\partial x'}+\frac{\partial\frac{x-x'}{r}v'}{\partial y'}+\frac{\partial\frac{x-x'}{r}w'}{\partial z'}\right]$$
$$-\int\frac{d\tau}{r}(x-x')\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)+\int\frac{u'}{r}d\tau,$$

gebracht werden kann, und wendet auf das erste Integral die bekannte Zurückführung an, durch welche dasselbe in ein über die begrenzende Oberfläche zu erstreckendes Integral übergeht, so erhält man:

$$U = -\int\frac{x-x'}{r}(u'\cos\lambda'+v'\cos\mu'+w'\cos\nu')\,d\sigma$$
$$-\int\frac{x-x'}{r}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)d\tau+\int\frac{u'}{r}d\tau,$$

oder mit Hülfe der zwei letzten der Gleichungen (1.)

$$U = \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial\varepsilon'}{\partial t}\frac{x-x'}{r}d\sigma+\tfrac{1}{2}\int\frac{\partial\varepsilon'}{\partial t}\frac{x-x'}{r}d\tau+\int\frac{u'}{r}d\tau.$$

Bezeichnet man durch Φ das halbe Potential zweiter Gattung (*Lamé* lécons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides pag. 71.):

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\Big[\int \varepsilon' r\, d\tau + \int e' r\, d\sigma\Big],$$

so lassen sich die U, V, W in die Form:

$$U = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \int \frac{u'}{r} d\tau,$$

$$V = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} + \int \frac{v'}{r} d\tau,$$

$$W = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} + \int \frac{w'}{r} d\tau$$

bringen, in denen Φ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Omega$$

genügt. Durch Substitution dieser Werthe gehen die Gleichungen (1.) in die folgenden über:

$$u = -2k\Big[\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial t^2} + \frac{4}{c^2}\int \frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial t} d\tau\Big],$$

$$v = -2k\Big[\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial t^2} + \frac{4}{c^2}\int \frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial t} d\tau\Big],$$

$$w = -2k\Big[\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z \partial t^2} + \frac{4}{c^2}\int \frac{1}{r}\frac{\partial w'}{\partial t} d\tau\Big].$$

Bildet man aus der ersten dieser Gleichungen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

und bemerkt, dass:

$$\Delta \Omega = -4\pi\varepsilon, \qquad \Delta \Phi = \Omega, \qquad \Delta \int \frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial t} d\tau = -4\pi \frac{\partial u}{\partial t},$$

so folgt:

$$\Delta u = -2k\Big[-4\pi \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial^3 \Omega}{\partial x \partial t^2} - \frac{16\pi}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}\Big].$$

Mit Hülfe der von *Kirchhoff* a. a. O. p. 533 gegebenen Gleichung

$$\frac{4}{c^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = \frac{1}{2k}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + 8\pi\varepsilon$$

erhält man hieraus durch Elimination von $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}$ das die Electricitätsbewegung charakterisirende Gleichungssystem:

$$(2.)\quad \begin{cases} \Delta u - \dfrac{32k\pi}{c^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = -2k\left[4\pi\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \dfrac{1}{2k}\dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t}\right], \\ \Delta v - \dfrac{32k\pi}{c^2}\dfrac{\partial v}{\partial t} = -2k\left[4\pi\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \dfrac{1}{2k}\dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y \partial t}\right], \\ \Delta w - \dfrac{32k\pi}{c^2}\dfrac{\partial w}{\partial t} = -2k\left[4\pi\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \dfrac{1}{2k}\dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z \partial t}\right], \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = -\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \end{cases}$$

welchem die Oberflächenbedingung

$$u\cos\lambda + v\cos\mu + w\cos\nu = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial t}$$

hinzuzufügen ist.

Macht man die Voraussetzung, dass $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ zu jeder Zeit ein vollständiges Differential sei, und bezeichnet die dieser Bedingung entsprechenden Stromdichtigkeiten durch $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, so genügen dieselben, wie man sofort erkennt, auch den pag. 305 des 61sten Bandes dieses Journals gegebenen, daselbst mit (2.) und (3.) bezeichneten Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi}\Delta\mathfrak{u} = -2k\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x} + 2h\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}, \\ -\dfrac{1}{4\pi}\Delta\mathfrak{v} = -2k\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial y} + 2h\dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}, \\ -\dfrac{1}{4\pi}\Delta\mathfrak{w} = -2k\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial z} + 2h\dfrac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = -\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \end{cases}$$

in welchen $h = \frac{4k}{c^2}$. Allein es ist unrichtig, diese Gleichungen, wie am angeführten Orte geschehen ist, als die Differentialgleichungen der dort als longitudinal bezeichneten Bewegungen anzusehen. Denn vier Functionen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, ε, welche diesen Gleichungen Genüge leisten, stellen nicht die Stromdichtigkeiten und die Dichtigkeit der freien Electricität einer möglichen Bewegung der Electricität dar, wenn sie nicht ausserdem noch die Bedingung erfüllen, dass $\mathfrak{u}\,dx + \mathfrak{v}\,dy + \mathfrak{w}\,dz$ zu jeder Zeit ein vollständiges Differential sei. Aber selbst in diesem Falle ist diese Möglichkeit nicht eine Folge der vom Verfasser aufgestellten Gleichungen, sondern eine Folge des Umstandes, dass alsdann die Grössen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ auch den Gleichungen (2.) genügen, welche der Verfasser nicht gegeben hat. Die Gleichungen (3.) haben nur die Eigenschaft, welche unzähligen anderen Gleichungen ebenfalls zukommt, dass nämlich eine

bestimmte Classe ihrer Integrale auch den Gleichungen (2.) als Integrale angehört, eine Eigenschaft, die nicht dazu berechtigt, sie mit der Electricitätstheorie in Zusammenhang zu bringen.

Die Gleichungen (2.) sind die Differentialgleichungen, welchen, den von *Kirchhoff* gegebenen Grundgleichungen gemäss, die Grössen u, v, w, ε in jedem Punkte *im Innern* des Leiters zu genügen haben. Aber selbst mit der *richtigen* Aufstellung partieller Differentialgleichungen ist bei mathematisch physikalischen Fragen Nichts geleistet, sofern nicht die an der Grenze stattfindenden Bedingungen berücksichtigt werden, welche zur definitiven Bestimmung der den partiellen Differentialgleichungen unterworfenen Grössen dienen. In Bezug auf diese giebt der Verfasser keine Andeutungen. Die Gleichungen (2.) enthalten keine Beziehung mehr zu der Form des betrachteten Leiters. Bei der Anwendung auf ein bestimmtes Problem ist es daher nothwendig, die Integrale der Gleichungen (2.) so zu bestimmen, dass die *Kirchhoff*schen Grundgleichungen (1.) von ihnen verificirt werden, die allein alle zur Lösung nothwendigen Bedingungen enthalten. Zur Ermittelung derjenigen Eigenschaften, welche den Integralen der Gleichungen (2.) zukommen müssen, damit sie einer vorgelegten Aufgabe entsprechen, hat man folgenden Weg einzuschlagen.

Man multiplicire die im ganzen Innern des Leiters erfüllten Gleichungen (2.)

$$\Delta u - \frac{32k\pi}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} + 8k\pi\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t} = 0,$$

$$\Delta v - \frac{32k\pi}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t} + 8k\pi\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y \partial t} = 0,$$

$$\Delta w - \frac{32k\pi}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t} + 8k\pi\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z \partial t} = 0$$

mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$, wo x', y', z' die Coordinaten eines beliebigen Punktes im Innern bedeuten, und integrire über das ganze Volumen des betrachteten Leiters. Transformirt man die so erhaltenen, von Null nicht verschiedenen Integrale durch partielle Integration oder mit Hülfe des *Green*schen Satzes, unter Rücksicht auf die Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t},$$

$$u\cos\lambda + v\cos\mu + w\cos\nu = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial t},$$

rückwärts, so wird man, wie leicht zu sehen, zu Gleichungen für die Werthe

von u, v, w im Punkte (x', y', z') gelangen, die sich von den *Kirchhoff*schen Grundgleichungen um Integrale unterscheiden, die durch die Oberfläche des Leiters zu erstrecken sind, und daher nur die in dieser Oberfläche stattfindenden Werthe von u, v, w, ε enthalten. Zur Zurückführung auf die *Kirchhoff*schen Gleichungen ist also für die zu suchenden Grössen u, v, w, ε die Bedingung nothwendig, dass ihre für die Oberfläche gültigen Werthe diese Integrale zu jeder Zeit zum Verschwinden bringen. Diese Bedingungen, deren Reduction, wenigstens für den ersten Anblick, nicht einfach ist, beschränken den Vortheil, welcher in der Verwandlung der Grundgleichungen in partielle Differentialgleichungen zu liegen scheint, wesentlich.

Durch den ersten, allgemein gehaltenen Theil der in Rede stehenden Abhandlung ist die Entwickelung der Differentialgleichungen (3.) in Zusammenhang gebracht worden mit der bekannten Zerlegung eines Systems dreier stetigen Functionen u, v, w des Orts (x, y, z), welche ihre Entstehung der Theorie der Elasticität verdankt. (*Lamé*, a. a. O. pag. 149; *Stokes*, dynamical theory of diffraction, Transactions of the Cambridge phil. soc. vol. 9). Dieser Zerlegung hat der Verfasser unter der Voraussetzung, dass u, v, w die im Punkt (x, y, z) zur Zeit t stattfindenden Geschwindigkeitscomponenten für das alsdann daselbst befindliche Theilchen einer in Bewegung begriffenen Masse bezeichnen, eine andere als analytische Bedeutung beigelegt, wenn er a. a. O. pag. 292 behauptet „dass der Bewegungszustand im Innern irgend welcher Körper sich in zwei zerlegen lasse, von denen der eine zu Verdichtungen *Veranlassung* gebe, der andere nicht“. Hierfür hätte es aber des Nachweises bedurft, dass die durch u, v, w und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ bezeichneten Theile der Geschwindigkeiten für sich genommen mögliche Bewegungen des betrachteten Massensystems darstellen; ein Nachweis, der ohne die Kenntniss der die betreffende Bewegung bestimmenden Differentialgleichungen, von welchen unabhängig der Verfasser seine Betrachtungen anstellt, nicht zu führen ist. Was den Verlauf einer in einem bestimmten Raume stetigen Function des Ortes (x, y, z) in demselben betrifft, so ist hinreichend bekannt, dass, wenn für diese Function *nur* die Bedingung der Stetigkeit vorgeschrieben ist, eine gegenseitige Abhängigkeit zwischen ihren Werthen in den verschiedenen Theilen dieses Raumes nicht stattfindet, und dass, wenn man über die Werthe in einem seiner Theile verfügt hat, die Verfügung in einem andern, von dem ersten getrennten Theile ganz willkürlich bleibt. Die von *Helmholtz* gegebenen, a. a. O. pag. 291 reproducirten Formeln

$$-4\pi u = \frac{\partial}{\partial x}\iiint \frac{\theta'\,dx'\,dy'\,dz'}{r} + \frac{\partial}{\partial x}\iiint \frac{2\eta'}{r}\,dx'\,dy'\,dz' - \frac{\partial}{\partial y}\iiint \frac{2\zeta'}{r}\,dx'\,dy'\,dz'$$

etc., in denen

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

und von noch hinzuzufügenden Integralen der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ abgesehen ist, enthalten Nichts als die Darstellung solcher Werthe u, v, w, welche durch die Annahme bedingt sind, dass die Grössen $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$ etc. etc. die in jedem Punkte des Raumes *willkürlich* aber nach der Stetigkeit gewählten Werthe ξ, η, ζ, θ annehmen, wobei ξ, η, ζ durch die in der Natur der Sache liegende Bedingung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

mit einander in Verbindung stehen. Ein Zusammenhang zwischen den Werthen der u, v, w entfernter Punkte kann aus den obigen Formeln nicht geschlossen werden. Ebenso wenig enthalten dieselben irgend eine Beziehung zu den gegebenen Kräften, wie der Verfasser anzunehmen scheint, indem er pag. 293 sagt: „dass sie keine ausser den gegebenen Kräften bestehenden Kraftwirkungen ausdrücken", etc.

Schliesslich bedarf es wohl kaum der Erwähnung, dass selbst die vollständige Kenntniss der u, v, w jedes Punktes einer in Bewegung befindlichen Masse als Functionen des Ortes für *einen* Zeitpunkt eben so wenig eine Untersuchung von *Bewegungen* gestattet, wie in dem entsprechenden Falle der Bewegung eines *einzelnen* Punktes die *alleinige* Kenntniss der Anfangsstellung und der Componenten der Anfangsgeschwindigkeit.

Berlin, 1863.

Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen.

(Von Herrn *F. G. Mehler* zu Danzig.)

---

1. Wenn $f(x)$ in eine convergente Reihe $a_0+a_1x+\cdots$ entwickelbar ist, und man setzt:

$$(1.)\quad \int_{-1}^{+1} f(x)(1-x)^{\lambda}(1+x)^{\mu}\,dx = A_1 f(\alpha_1)+A_2 f(\alpha_2)+\cdots+A_n f(\alpha_n)+\Delta,$$
$$(\lambda \text{ und } \mu > -1),$$

so lassen sich die A und α unabhängig von der Natur der Function $f(x)$ so bestimmen, dass der Fehler Δ die Form annimmt:

$$\Delta = a_{2n}\Delta_{2n}+a_{2n+1}\Delta_{2n+1}+\cdots,$$

also verschwindet, sofern $f(x)$ eine ganze Function von x ist, die den $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigt. Um zunächst die A durch die α auszudrücken, so sei:

$$\Psi_n(x) = \text{Const.}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

und man substituire für $f(x)$ die ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $\Psi_n(x):(x-\alpha_m)$; dann wird:

$$(2.)\quad A_m = \frac{1}{\Psi_n'(\alpha_m)}\int_{-1}^{+1}\frac{\Psi_n(x)(1-x)^{\lambda}(1+x)^{\mu}dx}{x-\alpha_m}.$$

Diesen Ausdruck wollen wir in (1.) einsetzen und zugleich für $f(x)$ die specielle Function $(z-x)^{-1}$, (worin $z>1$ oder <-1), nehmen, so lässt sich die Summe der n Terme auf der rechten Seite durch Benutzung der Interpolationsformel von *Lagrange* durch zwei Integrale ersetzen, von denen das eine mit dem auf der linken Seite der Gleichung übereinstimmt, und man erhält:

$$\Delta = \Sigma z^{-p-1}\Delta_p = \frac{1}{\Psi_n(z)}\int_{-1}^{+1}\frac{\Psi_n(x)(1-x)^{\lambda}(1+x)^{\mu}\,dx}{z-x}.$$

Soll nun Δ_p für $p<2n$ verschwinden, so muss die Entwickelung des letzten Ausdruckes nach absteigenden Potenzen von z nicht, wie es im Allgemeinen der Fall ist, mit z^{-n-1}, sondern mit z^{-2n-1} beginnen. Dieses wird aber erreicht, wenn man für $\Psi_n(x)$ die ganze Function n^{ten} Grades

$$\Psi_n(x) = k_n(1-x)^{-\lambda}(1+x)^{-\mu}\frac{d^n(1-x)^{n+\lambda}(1+x)^{n+\mu}}{dx^n}$$

wählt, und die α müssen also die n Wurzeln der Gleichung $\Psi_n(x) = 0$ sein, von denen sich leicht zeigen lässt, dass sie sämmtlich reell, von einander verschieden und zwischen den Grenzen -1 und $+1$ gelegen sind.

Die Constante k_n möge beliebig bleiben, jedoch $k_0 = 1$ sein; man bezeichne:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Psi_n(x)(1-x)^\lambda(1+x)^\mu\,dx}{z-x} = Z_n, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x)^\lambda(1+x)^\mu\,dx}{z-x} = Z_0$$

und setze die ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Psi_n(x)-\Psi_n(z)}{x-z}(1-x)^\lambda(1+x)^\mu\,dx = R_n,$$

so hat man die identische Gleichung:

$$(3.) \qquad \Psi_n(z)Z_0 = R_n + Z_n.$$

Diese Relation tritt, in etwas anderer Form, zuerst auf in der Abhandlung „Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe", welche aus den hinterlassenen Papieren von *Jacobi* durch Herrn *Heine* im 56sten Bande dieses Journals mitgetheilt ist, und man findet dort die Eigenschaften der Functionen $\Psi_n(z)$ und Z_n und ihre Bedeutung für die Theorie der hypergeometrischen Reihe und der *Gauss*ischen Kettenbrüche vollständig entwickelt. Es scheint indessen nicht überflüssig zu sein, die Sache auch auf dem hier eingeschlagenen Wege etwas weiter zu verfolgen, theils wegen der Vergleichung der Resultate mit den für die *Gauss*ische Quadratur geltenden, theils um gewisser specieller Resultate willen, die durch ihre Einfachheit bemerkenswerth sind.

2. Die Ausdrücke $(1-z)^\lambda(1+z)^\mu\,\Psi_n(z)$ und Z_n sind, abgesehen von dem Factor k_n, die n^{ten} Differentialquotienten der Grössen

$$(1-z)^{n+\lambda}(1+z)^{n+\mu} = \eta \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x)^{n+\lambda}(1+x)^{n+\mu}\,dx}{z-x} = q.$$

Nun findet man leicht, dass:

$$(1-z^2)\frac{d\eta}{dz} + \{(n+\lambda)(1+z) - (n+\mu)(1-z)\}\eta = 0,$$

$$(q.) \qquad (1-z^2)\frac{dq}{dz} + \{(n+\lambda)(1+z) - (n+\mu)(1-z)\}q = c_n,$$

wenn

$$c_n = 2^{2n+\lambda+\mu+1}\frac{\Pi(n+\lambda)\Pi(n+\mu)}{\Pi(2n+\lambda+\mu)}.$$

Indem man die eine oder die andere dieser Differentialgleichungen $n+1$mal nach

z differentiirt, erkennt man, dass die Grössen

$$(1-z)^{\lambda}(1+z)^{\mu}\,\Psi_n(z) \quad \text{und} \quad \mathbf{Z}_n$$

der Differentialgleichung

$$(u.) \qquad (1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}+\{(\lambda-1)(1+z)-(\mu-1)(1-z)\}\frac{du}{dz}+(n+1)(n+\lambda+\mu)u=0,$$

und folglich die Ausdrücke

$$\Psi_n(z) \quad \text{und} \quad (1-z)^{-\lambda}(1+z)^{-\mu}\,\mathbf{Z}_n$$

der Differentialgleichung

$$(v.) \qquad (1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2}-\{(\lambda+1)(1+z)-(\mu+1)(1-z)\}\frac{dv}{dz}+n(n+\lambda+\mu+1)v \;=\; 0$$

genügen, wie dies auch aus der angeführten Abhandlung von *Jacobi* hervorgeht. — Bringt man $(v.)$ auf die Form:

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z)^{\lambda+1}(1+z)^{\mu+1}\frac{dv}{dz}\right]+n(n+\lambda+\mu+1)(1-z)^{\lambda}(1+z)^{\mu}v \;=\; 0,$$

substituirt hierin für v den Werth von $(1-z)^{-\lambda}(1+z)^{-\mu}\mathbf{Z}_n$, wie er sich aus (3.) ergiebt, setzt der Kürze wegen

$$(1-z)^{-\lambda}(1+z)^{-\mu}R_n \;=\; L$$

und benutzt die aus $(q.)$ für $n=0$ hervorgehende Relation

$$\frac{d}{dz}[(1-z)^{-\lambda}(1+z)^{-\mu}\mathbf{Z}_0] \;=\; c_0(1-z)^{-\lambda-1}(1+z)^{-\mu-1},$$

so findet man für L die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z)^{\lambda+1}(1+z)^{\mu+1}\frac{dL}{dz}\right]+n(n+\lambda+\mu+1)(1-z)^{\lambda}(1+z)^{\mu}L \;=\; 2c_0\Psi_n'(z),$$

und ihre Verbindung mit derjenigen, welcher $\Psi_n(z)$ oder Ψ genügt, ergiebt:

$$(1-z)^{\lambda+1}(1+z)^{\mu+1}\left(\Psi\frac{dL}{dz}-L\frac{d\Psi}{dz}\right) \;=\; c_0\Psi^2-\delta.$$

Die Constante δ wird durch die Annahme $z=1$ bestimmt und erhält den Werth

$$\delta \;=\; 2^{2n+\lambda+\mu+1}\,\frac{\Pi(n)\,\Pi(n+\lambda)\,\Pi(n+\mu)}{\Pi(n+\lambda+\mu)}\,k_n^2.$$

Für $z=\alpha_m$ wird $\Psi=0$, also

$$(1-\alpha_m^2)\,\Psi_n'(\alpha_m)\,R_n(\alpha_m) \;=\; \delta,$$

und da $R_n(\alpha_m)=A_m\,\Psi_n'(\alpha_m)$ ist, so wird:

$$(2'.) \qquad A_m \;=\; \frac{\delta}{(1-\alpha_m^2)\,(\Psi_n(\alpha_m))^2}.$$

Dieser Ausdruck für die numerischen Coefficienten in der Näherungsformel (1.) ist merkwürdig durch seine Uebereinstimmung mit dem für die *Gauss*ische Quadratur geltenden, welcher von Herrn *Christoffel* im 55sten Bande dieses Journals (S. 69) abgeleitet worden ist.

3. Die Differentialgleichung (*v.*) geht in (*u.*) über, wenn man n in $n+\lambda+\mu$, λ in $-\lambda$ und μ in $-\mu$ verwandelt. Es ist also, wenn wir annehmen, dass $\lambda+\mu$ *eine ganze Zahl* sei, die ganze Function $(n+\lambda+\mu)^{\text{ten}}$ Grades

$$\Omega_n(z) = k_n(1-z)^{\lambda}(1+z)^{\mu}\,\frac{d^{n+\lambda+\mu}(1-z)^{n+\mu}(1+z)^{n+\lambda}}{dz^{n+\lambda+\mu}}$$

ein Particularintegral von (*u.*), und daher muss im Allgemeinen Z_n sich linear durch $\Omega_n(z)$ und $(1-z)^{\lambda}(1+z)^{\mu}\Psi_n(z)$ ausdrücken lassen. Die Werthe der Constanten werden am leichtesten durch die Annahme $z=\infty$ und $z=1$ bestimmt, und man erhält, wenn der Kürze halber

$$a = -\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}, \quad b_n = \frac{(-1)^{\lambda+\mu}\Pi(n)}{\Pi(n+\lambda+\mu)}$$

gesetzt wird:

$$(4.)\quad \begin{cases} Z_n = a\{(z-1)^{\lambda}(z+1)^{\mu}\Psi_n(z) - b_n\Omega_n(z)\}, & \text{also:} \\ Z_0 = a\{(z-1)^{\lambda}(z+1)^{\mu} - b_0\Omega_0(z)\}, \\ R_n = a\{b_n\Omega_n(z) - b_0\Omega_0(z)\Psi_n(z)\}. \end{cases}$$

Man darf hierin auch $z<-1$ nehmen, wenn man für ein negatives x die Potenz x^{ϱ} durch $(-x)^{\varrho}e^{\varrho\pi\sqrt{-1}}$ definirt, und ferner ist zu bemerken, dass die Formeln sich leicht auch noch für $\lambda+\mu=-1$ rechtfertigen lassen, in welchem Falle $b_0\Omega_0(z)=0$ wird.

Wenn λ und μ selbst ganze Zahlen sind, und nicht blos ihre Summe, so wird $a=\infty$, und folglich müssen dann die in a multiplicirten Ausdrücke identisch verschwinden. Bestimmt man jedoch die unter der Form $\infty.0$ erscheinenden Grössen nach den gewöhnlichen Regeln, so treten ausser den algebraischen Grössen auch Logarithmen auf. Ich will nur angeben, wie die Formeln sich hier für den Fall der *Gauss*ischen Quadratur gestalten. Die Gleichung (3.) wird dann, wenn wir dieselben Bezeichnungen wählen, die Herr *Heine* in seinem „Handbuch der Kugelfunctionen" (S. 53 und 84) anwendet:

$$\tfrac{1}{2}P^n(z)\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = Q^n(z)+R^n;$$

wir haben in unseren Formeln zu nehmen

$$k_n = \frac{(-1)^n}{2^n\Pi(n)}, \quad Z_n = 2Q^n(z), \quad R_n = 2R^n$$

und $\mu = -\lambda$ gleich einem unendlich kleinen Werthe ε zu setzen. Dadurch erhält man die folgenden Darstellungen von $Q^n(z)$ und R^n:

$$Q^n(z) = \frac{1}{2^n \Pi(n)} \left\{ \frac{d^n}{dz^n} \left[(z^2-1)^n \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right] - \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \frac{d^n (z^2-1)^n}{dz^n} \right\},$$

$$R^n = \frac{1}{2^n \Pi(n)} \left\{ \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \frac{d^n (z^2-1)^n}{dz^n} - \frac{d^n}{dz^n} \left[(z^2-1)^n \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right] \right\}.$$

Es folgt hieraus:

$$R^n + 2Q^n(z) = \frac{1}{2^n \Pi(n)} \frac{d^n}{dz^n} \left[(z^2-1)^n \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right].$$

Entwickelt man in dem letzten Ausdrucke den Logarithmus nach absteigenden Potenzen von $1+z$ oder $1-z$, so zerfällt er in eine Summe von Gliedern, von denen diejenigen, die als ganze Functionen zu R^n einen Beitrag liefern, sich als hypergeometrische Reihen mit dem vierten Elemente $\frac{1}{2}(1-z)$ oder $\frac{1}{2}(1+z)$ erweisen. Man erhält auf diese Weise:

$$R^n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{1}{n-s} F\left(-s, n+1, 1, \frac{1-z}{2}\right),$$

$$(-1)^{n-1} R^n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{1}{n-s} F\left(-s, n+1, 1, \frac{1+z}{2}\right).$$

Man findet ferner aus der letzten der Gleichungen (4.), wenn man die darin vorkommenden Functionen durch hypergeometrische Reihen ausdrückt, (man vergl. *Heine*, Handbuch der Kugelfunctionen S. 93), und dann $\mu = -\lambda = 0$ werden lässt, für R^n die Reihe:

$$R^n = h_0 + h_1 \frac{(n+1)n}{1.1} \left(\frac{z-1}{2}\right) + h_2 \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.1.2} \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \cdots,$$

worin

$$h_m = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad h_n = 0,$$

so wie eine ähnliche, die nach Potenzen von $z+1$ fortschreitet. Diese Darstellungen von R^n gewinnen an Interesse, wenn man sie mit den von *Dirichlet* gegebenen Entwicklungen von $P^n(\cos\vartheta)$ nach Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\vartheta$ und $\cos\frac{1}{2}\vartheta$ vergleicht. (Dieses Journal Bd. 17).

4. Wir betrachten jetzt den Fall $\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$, welcher die einfachsten Resultate liefert. Es wird nämlich hier, wenn man

$$k_n = \frac{(-1)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{2^n \Pi(n-\frac{1}{2})}$$

annimmt, nach einer bekannten Formel von *Jacobi:*

$$\Psi_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad \text{also:} \quad \alpha_m = \cos\frac{(2m+1)\pi}{2n}, \quad A_m = \frac{\pi}{n},$$

und folglich geht (1.) über in:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} f(\cos\vartheta)\,d\vartheta = \frac{\pi}{n}\{f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\cdots+f(\alpha_n)\}+a_{2n}\Delta_{2n}+\cdots$$

In dieser auch zu manchen Näherungsrechnungen brauchbaren Formel lassen sich auch für die zur Correction dienenden Grössen Δ_{2n} etc. sehr einfache und übersichtliche Ausdrücke auffinden. Bezeichnet man nämlich der Kürze wegen $z+\sqrt{z^2-1}$ durch ζ und nimmt $z>1$, so hat man:

$$\Psi_n(z) = \frac{\zeta^n+\zeta^{-n}}{2}, \qquad b_n\Omega_n(z) = \frac{\zeta^n-\zeta^{-n}}{2\sqrt{z^2-1}},$$

$$Z_n = \frac{\pi\zeta^{-n}}{\sqrt{z^2-1}}, \quad \Sigma z^{-p-1}\Delta_p = \frac{2\pi\zeta^{-2n}}{\sqrt{z^2-1}(1+\zeta^{-2n})}.$$

Der letzte Ausdruck, nach Potenzen von ζ entwickelt, nimmt die Form an:

$$\Sigma z^{-p-1}\Delta_p = 2(Z_{2n}-Z_{4n}+Z_{6n}-\cdots).$$

Nun erhält man für Z_{2m} aus (*u.*) oder aus dem bestimmten Integrale, wodurch es ursprünglich definirt wurde, leicht die Reihenentwicklung:

$$Z_{2m} = \pi\sum_{s=m}^{s=\infty}(2s)_{s-m}\frac{z^{-2s-1}}{2^{2s}}, \quad (2s)_{s-m} = \frac{\Pi(2s)}{\Pi(s-m)\Pi(s+m)};$$

daher ist $\Delta_p=0$, wenn p ungerade oder $<2n$ ist, im Uebrigen aber für $p=2s$:

$$\Delta_{2s} = \frac{\pi}{2^{2s-1}}\{(2s)_{s-n}-(2s)_{s-2n}+(2s)_{s-3n}-\cdots\},$$

wenn man die Reihe abbricht, sobald die Indices negativ werden. Die Reihe reducirt sich also auf ihr erstes Glied, so lange $n\leqq s<2n$, u. s. w. Dieses Resultat, welches hier aus seinem Zusammenhange mit der allgemeinen Theorie abgeleitet ist, lässt sich auch auf elementarem Wege leicht verificiren. Schliesslich bemerke ich noch, dass für $\lambda=\mu=+\frac{1}{2}$ die Resultate sich ganz ähnlich und fast ebenso einfach gestalten.

Danzig, den 7. October 1863.

Ueber die durch einen Magnet in einem rotirenden Stromleiter inducirten elektrischen Ströme.

(Von Herrn *E. Jochmann.*)

Aragos „Rotationsmagnetismus" war bekanntlich die am frühesten beobachtete Erscheinung im Gebiete der Inductionselektricität. Obgleich der Fundamentalversuch mit der unter dem Einfluss eines Magnets rotirenden Kupferscheibe, namentlich seit der Entdeckung der Inductionsströme durch *Faraday* und der darauf begründeten richtigen Erklärung der Erscheinung, in mannigfaltiger Weise modificirt worden ist, so sind doch unsere Kenntnisse über denselben sowohl in experimenteller wie in theoretischer Beziehung noch sehr mangelhaft. Experimentell ist der Verlauf der in dem rotirenden Leiter inducirten Ströme noch durchaus nicht mit Sicherheit festgestellt, da, wie ich mir an einem anderen Orte näher nachzuweisen vorbehalte, die zur Aufsuchung der Strömungscurven gebrauchten Versuchsmethoden diesen Zweck nicht erfüllen. Dieselben beruhen nämlich auf der unstatthaften Voraussetzung, dass das System der Strömungscurven orthogonal sei zu den Niveaulinien des Potentials der freien Elektricität. In theoretischer Hinsicht lässt aber die bisherige Behandlung des Problems noch viel mehr zu wünschen übrig. Während einerseits durch *Neumann*, *Weber* u. A. die Gesetze der durch Bewegung *linearer* Leiter unter dem Einfluss von Magnetpolen inducirten Ströme vollständig festgestellt und von *Weber* auf das allgemeine Grundgesetz der Wechselwirkung bewegter Elektricitätsmengen zurückgeführt wurden — während andererseits *Kirchhoff**) die allgemeinen Differentialgleichungen für den variablen Strömungszustand in ruhenden körperlichen Leitern mit Rücksicht auf die durch die Stromintensitätsänderung zwischen den verschiedenen Theilen des Leiters hervorgebrachte Inductionswirkung aufgestellt und daraus gewisse allgemeine Folgerungen gezogen hat, sind für die Induction in körperlichen Leitern, welche unter dem Einfluss eines Magnets bewegt werden, noch nicht einmal die allgemeinen Differentialgleichungen aufgestellt worden, von deren Integration die Lösung des Problemes abhängt. Bekanntlich hat *Poisson***) bald nach dem Bekanntwerden des Versuches von *Arago* die Erscheinung aus der Wirkung

*) *Kirchhoff,* Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern. *Poggendorffs* Annalen der Physik und Chemie CII., p. 529.

**) *Poisson,* Mémoire sur la théorie du magnétisme en mouvement. Mémoires de l'acad. des sciences de Paris. Année 1823. T. VI. Paris 1827.

des Magnetismus im Entstehen und Verschwinden zu erklären gesucht, welche auch bei den Metallen (wie Kupfer) sehr merklich sein können, welche nachdem der magnetische Gleichgewichtszustand der Moleküle eingetreten, keine wahrnehmbare Wirkung auf die Magnetnadel ausüben. Indessen ist die Theorie von *Poisson,* so scharfsinnig dieselbe auch erdacht und durchgeführt sein mag, seit *Faradays* Entdeckung als veraltet zu betrachten. Ausser den experimentellen Arbeiten von *Faraday* *), von *Nobili* und *Antinori* **) und von *Matteucci* †), auf welche ich an einem anderen Orte zurückkommen werde, ist hier noch eine theoretische Abhandlung von *Felici* ††) zu erwähnen. Derselbe hat, veranlasst durch die Beobachtungen von *Matteucci,* versucht, die Induction in einer unendlich dünnen unbegrenzten ebenen Scheibe zu bestimmen, welche unter dem Einfluss eines oder zweier entgegengesetzten in der Ebene der Scheibe liegenden Magnetpole rotirt. Obgleich dieser Fall, wie unten gezeigt werden wird, wegen der sich dabei ergebenden Unstetigkeit nur als Grenzfall zulässig ist, und obgleich *Felici* zur Lösung des Problems mehrfache Annahmen zur Hülfe nimmt, deren Richtigkeit des Beweises bedarf, so stimmt doch das Resultat der im Folgenden gegebenen Theorie für diesen Grenzfall, was die Form der Strömungscurven betrifft, mit dem von *Felici* auf durchaus anderem Wege gefundenen überein.

In der folgenden Abhandlung werden zuerst die allgemeinen Gleichungen der Elektricitätsbewegung in einem leitenden Umdrehungskörper von beliebiger Gestalt aufgestellt, welcher unter dem Einfluss einer gegebenen magnetischen Vertheilung mit constanter Geschwindigkeit um seine Axe rotirt. Es sind zur Aufstellung und Reduction dieser Gleichungen keine anderen Annahmen erforderlich als das von *Weber* aufgestellte Gesetz der Wechselwirkung bewegter elektrischer Massen und die Bedingungen, welche sich aus der Voraussetzung des constanten Strömungszustandes ergeben. Indem sodann die Gleichungen auf den besonderen Fall angewendet werden, wo die gegebene magnetische Vertheilung um die Rotationsaxe symmetrisch ist, wird gezeigt, dass in diesem Fall die Stromcomponenten in jedem Punkte des Leiters verschwinden, dass also keine Ströme inducirt werden, sondern dass eine

---

*) *Faraday,* Philosoph. Transact. 1832; *Poggendorffs* Annalen XXV, p. 120.

**) *Nobili* und *Antinori,* Antologia di Firenze No. 134; *Poggendorffs* Annalen XXIV, p. 621.

†) *Matteucci,* Annales de chimie et de physique (3. sér.) T. XXXIX und Cours spécial sur l'induction, le magnétisme de rotation etc. Paris 1853.

††) *Tortolini,* Annali di scienze matematiche e fisiche 1853 p. 173 u. 1854 p. 35.

Vertheilung freier Elektricität auf der Oberfläche und im Innern des Leiters angebbar ist, deren Potential in jedem Punkte des Leiters der von den Magnetismen inducirten elektromotorischen Kraft das Gleichgewicht hält. Endlich wird der Fall einer von zwei parallelen Ebenen begrenzten Scheibe von beliebiger Dicke behandelt, welche unter dem Einfluss eines oder mehrerer nicht in der Umdrehungsaxe liegender Magnetpole rotirt, indem dabei die vereinfachende Voraussetzung gemacht wird, dass die Rotationsgeschwindigkeit und somit die Stromintensität klein genug ist, um die Inductionswirkung zwischen den verschiedenen Theilen der Scheibe gegen die directe inducirende Wirkung der Magnetpole vernachlässigen zu können.

1. Wenn ein aus homogener leitender Substanz gebildeter Umdrehungskörper unter Einfluss einer beliebig gegebenen Vertheilung von Magnetismen oder eines beliebigen Systems ausserhalb des Leiters geschlossener galvanischer Ströme mit constanter Winkelgeschwindigkeit um seine Axe rotirt, so wird in dem Leiter ein System von Strömen inducirt, deren Richtung und Intensität an jeder Stelle des Raumes constant bleibt, so lange die inducirenden magnetischen Kräfte und die Rotationsgeschwindigkeit des Leiters unverändert bleiben. Die in einem beliebigen Leiterelement inducirte elektromotorische Kraft rührt dann theils von der Bewegung des Leiterelements relativ gegen die ausserhalb des Leiters gegebenen Magnetismen, theils von der Bewegung relativ gegen das in allen übrigen Theilen des Leiters vorhandene und im Raume ruhende Stromsystem, theils endlich von der Vertheilung freier Elektricität her, welche sich auf der Oberfläche und, wie sich zeigen wird, auch im Innern des Leiters bildet. Es seien $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die auf drei ruhende rechtwinklige Coordinatenaxen bezogenen Geschwindigkeitscomponenten, mit welchen das im Punkte x, y, z befindliche Leiterelement bewegt wird; es bezeichnen ferner u, v, w die nach denselben Axen zerlegten Componenten der Stromdichtigkeit im Punkte x, y, z und u', v', w' die Stromcomponenten in einem beliebigen anderen Leiterelement x', y', z'. Aus dem *Weber*schen Gesetz *) ergiebt sich dann die elektromotorische Kraft, welche durch das in dem Raumelement $dx'dy'dz'$ befindliche Stromelement u', v', w' in dem mit den Geschwindigkeitscomponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ bewegten Leiterelement inducirt

*) Elektrodynamische Maassbestimmungen, erste Abhandlung p. 339 und vierte Abhandlung p. 268. Es ist in dieser Abhandlung das elektromagnetische Maass für die Stromintensitäten zu Grunde gelegt, während die elektromotorischen Kräfte nach absolut mechanischem Maass gemessen sind.

wird, gleich $-\frac{2ki'\varpi}{r^2}(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta')\,dx'\,dy'\,dz'$.

In diesem Ausdruck bezeichnet

$$r = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

die Entfernung zwischen Strom- und Leiterelement,

$$i' = \sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}$$

die Stromdichtigkeit im Punkte x', y', z',

$$\varpi = \sqrt{\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2}$$

die absolute Geschwindigkeit des bewegten Leiterelements, ε, ϑ und ϑ' beziehungsweise die von den Richtungen von i' und ϖ, von ϖ und r und von i' und r eingeschlossenen Winkel: endlich $2k$ die Constante $\frac{1}{155370.10^6}$, wenn Millimeter und Secunde als Einheiten angenommen werden. Es ist demnach

$$i'\varpi\cos\varepsilon = \mathfrak{u}u'+\mathfrak{v}v'+\mathfrak{w}w',$$

$$i'\cos\vartheta' = u'\frac{x'-x}{r}+v'\frac{y'-y}{r}+w'\frac{z'-z}{r},$$

$$\varpi\cos\vartheta = \mathfrak{u}\frac{x'-x}{r}+\mathfrak{v}\frac{y'-y}{r}+\mathfrak{w}\frac{z'-z}{r},$$

wodurch der obige Ausdruck übergeht in

$$-\frac{2k}{r^2}\left[\mathfrak{u}u'+\mathfrak{v}v'+\mathfrak{w}w'-\tfrac{3}{2}\left(\mathfrak{u}\frac{x'-x}{r}+\mathfrak{v}\frac{y'-y}{r}+\mathfrak{w}\frac{z'-z}{r}\right)\left(u'\frac{x'-x}{r}+v'\frac{y'-y}{r}+w'\frac{z'-z}{r}\right)\right].$$

Mit dieser Kraft wird durch die Einwirkung des Stromelements u', v', w' die in x, y, z befindliche Einheit der positiven und negativen Elektricität in der Richtung der Verbindungslinie r geschieden. Indem man diese elektromotorische Kraft in ihre rechtwinkligen Componenten zerlegt und die Wirkungen aller Stromelemente summirt, erhält man für die Componenten der elektromotorischen Wirkung des ganzen Stromsystems auf die in x, y, z befindliche Einheit der Elektricität die Ausdrücke:

$$X = -2k\int\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^2}\,\frac{x'-x}{r}(\mathfrak{u}u'+\mathfrak{v}v'+\mathfrak{w}w')$$

$$+3k\int\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^2}\,\frac{x'-x}{r}\left(\mathfrak{u}\frac{x'-x}{r}+\mathfrak{v}\frac{y'-y}{r}+\mathfrak{w}\frac{z'-z}{r}\right)\left(u'\frac{x'-x}{r}+v'\frac{y'-y}{r}+w'\frac{z'-z}{r}\right),$$

$$Y = -2k\int\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^2}\,\frac{y'-y}{r}(\mathfrak{u}u'+\mathfrak{v}v'+\mathfrak{w}w')$$

$$+3k\int\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^2}\,\frac{y'-y}{r}\left(\mathfrak{u}\frac{x'-x}{r}+\mathfrak{v}\frac{y'-y}{r}+\mathfrak{w}\frac{z'-z}{r}\right)\left(u'\frac{x'-x}{r}+v'\frac{y'-y}{r}+w'\frac{z'-z}{r}\right),$$

$$Z = -2k\int\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^2}\,\frac{z'-z}{r}(\mathfrak{u}u'+\mathfrak{v}v'+\mathfrak{w}w')$$

$$+3k\int\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^2}\,\frac{z'-z}{r}\left(\mathfrak{u}\frac{x'-x}{r}+\mathfrak{v}\frac{y'-y}{r}+\mathfrak{w}\frac{z'-z}{r}\right)\left(u'\frac{x'-x}{r}+v'\frac{y'-y}{r}+w'\frac{z'-z}{r}\right).$$

Diese Ausdrücke vereinfachen sich bedeutend durch die Bedingungen, welchen die u', v', w' im Fall eines constanten Strömungszustandes unterworfen sind. Es ist nämlich für jeden Punkt im Innern des Leiters

$$(1.) \qquad \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0$$

und für jeden Punkt an der Oberfläche

$$(2.) \qquad u' \cos\lambda + v' \cos\mu + w' \cos\nu = 0,$$

wo λ, μ, ν die Winkel bezeichnen, welche die im Punkte x', y', z' nach dem Innern des Leiters gerichtete Normale mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen einschliesst. Die letztere Gleichung besagt, wie bekannt, dass die zur Oberfläche des Leiters normale Stromcomponente in jedem Punkt der Oberfläche verschwinden muss, während der Ausdruck auf der linken Seite der ersten Gleichung den Zuwachs der negativen Elektricität in dem Leiterelement $dx'dy'dz'$ darstellt, welcher bei einem constanten Stromsystem ebenfalls gleich Null sein muss. Setzt man

$$(3.) \qquad \alpha = \int \frac{u'}{r} dx'dy'dz', \quad \beta = \int \frac{v'}{r} dx'dy'dz', \quad \gamma = \int \frac{w'}{r} dx'dy'dz',$$

so lässt sich der Ausdruck für X in der Form schreiben

$$\begin{aligned} X = & -2k\left\{\mathfrak{u}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \mathfrak{v}\frac{\partial\beta}{\partial x} + \mathfrak{w}\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right\} \\ & + 3k\Big[\mathfrak{u}\int\frac{(x'-x)^2}{r^5}\{u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)\}dx'dy'dz' \\ & + \mathfrak{v}\int\frac{(x'-x)(y'-y)}{r^5}\{u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)\}dx'dy'dz' \\ & + \mathfrak{w}\int\frac{(x'-x)(z'-z)}{r^5}\{u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)\}dx'dy'dz'\Big]. \end{aligned}$$

Es mag bemerkt werden, dass diese Integrale einen endlichen und bestimmten Werth besitzen, indem der Factor $\frac{(x'-x)^2}{r^2}$ oder $\frac{(x'-x)(y'-y)}{r^2}$ immer kleiner als Eins ist und die über den Leiter erstreckten Integrale von der Form $\int u' \frac{x'-x}{r^3} dx'dy'dz'$, wie anderweitig bekannt, überall stetig und endlich bleiben.

Zur Reduction der im obigen Ausdruck vorkommenden Integrale bemerke man, dass man hat:

$$\begin{aligned} & 3\int\frac{(x'-x)^2}{r^5}\{u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)\}dx'dy'dz' \\ & = -\int\left\{\frac{\partial\frac{u'(x'-x)^2}{r^3}}{\partial x'} + \frac{\partial\frac{v'(x'-x)^2}{r^3}}{\partial y'} + \frac{\partial\frac{w'(x'-x)^2}{r^3}}{\partial z'}\right\}dx'dy'dz' \\ & \quad + \int\frac{(x'-x)^2}{r^3}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right)dx'dy'dz' + 2\int\frac{u'(x'-x)}{r^3}dx'dy'dz'. \end{aligned}$$

Das zweite Integral verschwindet in Folge der Gleichung (1.); das erste verwandelt sich, indem man in jedem Gliede eine Integration ausführt, nach einer bekannten Reduction in

$$-\int \frac{(x'-x)^2}{r^3}(u'\cos\lambda+v'\cos\mu+w'\cos\nu)\,ds,$$

wo ds ein Element der Oberfläche des Leiters bezeichnet und verschwindet in Folge der Gleichung (2.). Es ist also

$$3\int \frac{(x'-x)^2}{r^5}\{u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)\}\,dx'\,dy'\,dz'$$
$$=2\int \frac{u'(x'-x)}{r^3}\,dx'\,dy'\,dz'=2\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

Behandelt man auf analoge Weise die andern Theile von X, so erhält man

$$3\int \frac{(x'-x)(y'-y)}{r^5}\{u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)\}\,dx'\,dy'\,dz' = \frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x},$$
$$3\int \frac{(x'-x)(z'-z)}{r^5}\{u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)\}\,dx'\,dy'\,dz' = \frac{\partial\alpha}{\partial z}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}.$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck für X und verfährt auf entsprechende Weise mit den Componenten Y und Z, so erhält man:

$$(4.)\quad \begin{cases} X = k\left\{\mathfrak{v}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)-\mathfrak{w}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)\right\}, \\ Y = k\left\{\mathfrak{w}\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)-\mathfrak{u}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\right\}, \\ Z = k\left\{\mathfrak{u}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)-\mathfrak{v}\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\right\}. \end{cases}$$

Bevor wir zur Aufstellung der entsprechenden Ausdrücke für die von der gegebenen magnetischen Vertheilung herrührenden Componenten der elektromotorischen Kräfte übergehen, soll noch auf einige Eigenschaften der Integrale α, β, γ hingewiesen werden, von welchen wir im Folgenden Gebrauch zu machen haben. Setzt man

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

so ist zunächst ersichtlich, dass für jeden Punkt im Innern des Leiters

$$(5.)\quad \Delta\alpha=-4\pi u,\quad \Delta\beta=-4\pi v,\quad \Delta\gamma=-4\pi w$$

ist. Ferner hat man

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}=\int\frac{u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)}{r^3}\,dx'\,dy'\,dz'$$
$$=-\int\left\{\frac{\partial\frac{u'}{r}}{\partial x'}+\frac{\partial\frac{v'}{r}}{\partial y'}+\frac{\partial\frac{w'}{r}}{\partial z'}\right\}dx'\,dy'\,dz'+\int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)dx'\,dy'\,dz',$$

welche beiden Integrale in Folge der Gleichungen (1.) und (2.) verschwinden. Mithin ist

$$(6.) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Endlich lassen sich mit Rücksicht auf (6.) die Gleichungen (5.) in der Form schreiben

$$(7.) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}-\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial x}\right) = 4\pi u, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \beta}{\partial z}-\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right) = 4\pi v, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \beta}{\partial z}-\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}-\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) = 4\pi w. \end{cases}$$

2. Es ist zur Aufstellung der Differentialgleichungen der Elektricitätsbewegung nur noch erforderlich die von der ausserhalb des Leiters gegebenen magnetischen Vertheilung herrührenden elektromotorischen Kräfte zu bestimmen, indem ein ausserdem etwa vorhandenes System geschlossener Ströme, wie bekannt, immer durch eine Vertheilung von Magnetismen ersetzt werden kann. Die von dem magnetischen Element μ in dem mit der Geschwindigkeit $\varpi = \sqrt{u^2+v^2+w^2}$ bewegten Leiterelement inducirte elektromotorische Kraft ergiebt sich aus dem *Weber*schen Gesetz *) gleich

$$2k\varpi\frac{\mu \sin\varphi}{r^2},$$

in welchem Ausdruck k die magnetische Inductionsconstante, φ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtungen von r und ϖ einschliessen. Werden die Stromintensitäten nach elektromagnetischer Maasseinheit gemessen, so ist die Constante k mit der oben mit demselben Buchstaben bezeichneten Constante identisch. Die Richtung, in welcher die elektromotorische Kraft die in x, y, z befindlichen Elektricitäten zu scheiden strebt, ist senkrecht zu der durch r und die Bewegungsrichtung gelegten Ebene. Sind daher λ, μ, ν die Winkel, welche die Richtung der elektromotorischen Kraft mit den Coordinatenaxen einschliesst, so sind die Cosinus dieser Winkel durch die Gleichungen bestimmt

$$\begin{cases} (x'-x)\cos\lambda+(y'-y)\cos\mu+(z'-z)\cos\nu = 0, \\ u\cos\lambda+ \quad v\cos\mu+ \quad w\cos\nu = 0, \\ \cos^2\lambda+ \quad \cos^2\mu+ \quad \cos^2\nu = 1. \end{cases}$$

*) Elektrodynamische Maassbestimmungen; erste Abhandlung p. 345.

Daraus ergiebt sich

$$\varpi\cos\lambda = \frac{\mathfrak{v}(z'-z)-\mathfrak{w}(y'-y)}{r\sin\varphi},$$

$$\varpi\cos\mu = \frac{\mathfrak{w}(x'-x)-\mathfrak{u}(z'-z)}{r\sin\varphi},$$

$$\varpi\cos\nu = \frac{\mathfrak{u}(y'-y)-\mathfrak{v}(x'-x)}{r\sin\varphi}.$$

Es werden demnach die rechtwinkligen Componenten der von dem magnetischen Theilchen μ inducirten elektromotorischen Kraft

$$2k\mu\left\{\mathfrak{v}\frac{z'-z}{r^3}-\mathfrak{w}\frac{y'-y}{r^3}\right\} = 2k\left\{\mathfrak{v}\frac{\partial\frac{\mu}{r}}{\partial z}-\mathfrak{w}\frac{\partial\frac{\mu}{r}}{\partial y}\right\},$$

$$2k\mu\left\{\mathfrak{w}\frac{x'-x}{r^3}-\mathfrak{u}\frac{z'-z}{r^3}\right\} = 2k\left\{\mathfrak{w}\frac{\partial\frac{\mu}{r}}{\partial x}-\mathfrak{u}\frac{\partial\frac{\mu}{r}}{\partial z}\right\},$$

$$2k\mu\left\{\mathfrak{u}\frac{y'-y}{r^3}-\mathfrak{v}\frac{x'-x}{r^3}\right\} = 2k\left\{\mathfrak{u}\frac{\partial\frac{\mu}{r}}{\partial y}-\mathfrak{v}\frac{\partial\frac{\mu}{r}}{\partial x}\right\}.$$

Bezeichnet demnach $\mu dx'dy'dz'$ die Menge des in dem ausserhalb des Leiters gelegenen Volumenelement $dx'dy'dz'$ enthaltenen magnetischen Fluidums und

$$(8.)\qquad P = \int\frac{\mu}{r}dx'\,dy'\,dz'$$

das Potential der gegebenen magnetischen Vertheilung, so ergeben sich die gesuchten Componenten der gesammten elektromotorischen Wirkung

$$A = 2k\left\{\mathfrak{v}\frac{\partial P}{\partial z}-\mathfrak{w}\frac{\partial P}{\partial y}\right\},$$

$$B = 2k\left\{\mathfrak{w}\frac{\partial P}{\partial x}-\mathfrak{u}\frac{\partial P}{\partial z}\right\},$$

$$C = 2k\left\{\mathfrak{u}\frac{\partial P}{\partial y}-\mathfrak{v}\frac{\partial P}{\partial x}\right\}.$$

Da innerhalb des rotirenden Leiters der Voraussetzung zufolge keine Magnetismen vorhanden sind, so ist für jeden Punkt im Innern des Leiters

$$(9.)\qquad \Delta P = 0.$$

3. Ist V das Potential der auf dem rotirenden Leiter vorhandenen freien Elektricität und K sein Leitungsvermögen, so ergeben sich für die Componenten der Stromdichtigkeit im Punkte x, y, z die Ausdrücke

$$(10.)\quad \begin{cases} u = K\left\{-\frac{\partial V}{\partial x}+X+A\right\}, \\ v = K\left\{-\frac{\partial V}{\partial y}+Y+B\right\}, \\ w = K\left\{-\frac{\partial V}{\partial z}+Z+C\right\}. \end{cases}$$

Setzt man

$$(11.)\quad \begin{cases} L = 2k\frac{\partial P}{\partial x}+k\left(\frac{\partial \beta}{\partial z}-\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right), \\ M = 2k\frac{\partial P}{\partial y}+k\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}-\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right), \\ N = 2k\frac{\partial P}{\partial z}+k\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial x}\right), \end{cases}$$

so wird

$$(12.)\quad \begin{cases} X+A = \mathfrak{v}N-\mathfrak{w}M, \\ Y+B = \mathfrak{w}L-\mathfrak{u}N, \\ Z+C = \mathfrak{u}M-\mathfrak{v}L. \end{cases}$$

Aus der Form dieser Ausdrücke folgt unmittelbar die Relation

$$\mathfrak{u}(X+A)+\mathfrak{v}(Y+B)+\mathfrak{w}(Z+C) = 0,$$

welche ausdrückt, dass die gesammte von den Inductionswirkungen herrührende elektromotorische Kraft in jedem Punkte auf der Bewegungsrichtung des Leiterelements senkrecht steht. Durch Differentiation ergiebt sich aus den Ausdrücken (11.) mit Rücksicht auf (7.) und (9.)

$$(13.)\quad \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y} = 4\pi k u, \\ \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z} = 4\pi k v, \\ \frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x} = 4\pi k w, \end{cases}$$

$$(14.)\quad \frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

Durch Einführung der Werthe (12.) in die Gleichungen (10.) folgt

$$(15.)\quad \begin{cases} u = K\left\{-\frac{\partial V}{\partial x}+\mathfrak{v}N-\mathfrak{w}M\right\}, \\ v = K\left\{-\frac{\partial V}{\partial y}+\mathfrak{w}L-\mathfrak{u}N\right\}, \\ w = K\left\{-\frac{\partial V}{\partial z}+\mathfrak{u}M-\mathfrak{v}L\right\}. \end{cases}$$

Aus diesen drei Gleichungen in Verbindung mit der für jeden Punkt im Innern des Leiters zu erfüllenden Bedingung

$$(16.) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

sind die Functionen u, v, w und V so zu bestimmen, dass gleichzeitig der für jeden Punkt der Oberfläche geltenden Bedingungsgleichung

$$(17.) \qquad u\cos\lambda+v\cos\mu+w\cos\nu = 0$$

genügt wird. Mit Hülfe der Gleichungen (13.) kann man nun entweder die u, v, w oder die L, M, N aus den Gleichungen (15.) eliminiren. Im ersten Fall erhält man

$$(18.) \qquad \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y} = 4\pi kK\left\{-\frac{\partial V}{\partial x}+\mathfrak{v}N-\mathfrak{w}M\right\}, \\ \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z} = 4\pi kK\left\{-\frac{\partial V}{\partial y}+\mathfrak{w}L-\mathfrak{u}N\right\}, \\ \frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x} = 4\pi kK\left\{-\frac{\partial V}{\partial z}+\mathfrak{u}M-\mathfrak{v}L\right\}, \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen in Verbindung mit (14.) die Functionen L, M, N, V so zu bestimmen sind, dass gleichzeitig der Oberflächenbedingung

$$(19.) \qquad \left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)\cos\lambda+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}\right)\cos\mu+\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)\cos\nu = 0$$

genügt wird. Es muss jedoch bemerkt werden, dass, da die Gleichungen (13.) durch Differentiation aus (11.) entstanden sind, die ersteren zwar eine nothwendige Folge der letzteren sind, das Umgekehrte aber nicht stattfindet. Es drücken daher die Gleichungen (18.) eine allgemeinere mögliche Elektricitätsbewegung aus als die ursprünglichen Gleichungen (15.), so dass die ersteren durch Integrale der letzteren immer erfüllt werden müssen, nicht aber umgekehrt. Es müssen daher, wenn es gelungen ist, allgemeine Integrale der Gleichungen (18.) aufzufinden, die in denselben enthaltenen willkürlichen Functionen so specialisirt werden, dass gleichzeitig den Gleichungen (11.) genügt wird. Es enthalten z. B. die Integralgleichungen $L=0$, $M=0$, $N=0$, $V=$ const., aus welchen ferner $u=v=w=0$ folgen würde, eine particuläre Lösung der Gleichungen (18.), durch welche aber die Gleichungen (11.) nicht erfüllt werden können, und welche daher auch nicht als Lösung der Gleichungen (15.) betrachtet werden darf, wenn nicht $P=$ const. ist. Ein System von Gleichungen für die u, v, w, welches der Form nach den Gleichungen (18.) für L, M, N ganz analog ist, erhält man, wenn man umgekehrt mit Hülfe der

Gleichungen (13.) die L, M, N aus (15.) eliminirt. Bildet man nämlich den Ausdruck $\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}$ und die analogen Ausdrücke durch Differentiation von (15.) und setzt

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi k}(\mathfrak{u}L + \mathfrak{v}M + \mathfrak{w}N),$$

so ergeben sich zur Bestimmung der Functionen u, v, w, Ψ die Gleichungen

$$(20.)\quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 4\pi kK\left\{-\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mathfrak{v}w - \mathfrak{w}v\right\}, \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 4\pi kK\left\{-\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \mathfrak{w}u - \mathfrak{u}w\right\}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 4\pi kK\left\{-\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \mathfrak{u}v - \mathfrak{v}u\right\}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

von welchen dieselbe Bemerkung gilt, welche oben bezüglich der Gleichungen (18.) gemacht wurde. Handelt es sich nur um die Bestimmung der Wirkung, welche das im Leiter inducirte Stromsystem auf einen äusseren Magnetpol ausübt, so ist übrigens die Kenntniss der u, v, w selbst nicht erforderlich, indem die zweiten Glieder der Ausdrücke L, M, N für einen äusseren Punkt, wie leicht ersichtlich, bis auf einen constanten Factor die rechtwinkligen Componenten dieser Wirkung ausdrücken.

Nimmt man die Rotationsaxe zur Axe der Z und bezeichnet n die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, so ist

$$\mathfrak{u} = -ny, \quad \mathfrak{v} = nx, \quad \mathfrak{w} = 0.$$

und die Gleichungen (15.) gehen über in

$$(15^*.)\quad \begin{cases} u = K\left\{-\frac{\partial V}{\partial x} + nxN\right\}, \\ v = K\left\{-\frac{\partial V}{\partial y} + nyN\right\}, \\ w = K\left\{-\frac{\partial V}{\partial z} - n(xL + yM)\right\}. \end{cases}$$

* * *

4. In dem besonderen Fall, dass die gegebene magnetische Vertheilung rings um die Rotationsaxe symmetrisch, oder das Potential P eine

Function von z und $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ist, kann man den Gleichungen (15*.) durch die Annahme

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

genügen, oder mit anderen Worten, es lässt sich immer eine Vertheilung freier Elektricität auf der Oberfläche und im Innern des Leiters angeben, welche so beschaffen ist, dass ihr Potential der von der magnetischen Vertheilung inducirten elektromotorischen Kraft in jedem Leiterelement das Gleichgewicht hält, dass also keine Strömungen stattfinden. In diesem Fall reduciren sich nämlich die Ausdrücke (11.) auf

$$L = 2k\frac{\partial P}{\partial x}, \quad M = 2k\frac{\partial P}{\partial y}, \quad N = 2k\frac{\partial P}{\partial z},$$

wodurch die Gleichungen (15*.) übergehen in

$$(21.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = 2nkx\,\dfrac{\partial P}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = 2nky\,\dfrac{\partial P}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -2nk\left(x\dfrac{\partial P}{\partial x} + y\dfrac{\partial P}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Es ist leicht ersichtlich, dass, wenn P eine Function von r und z allein ist, die Ausdrücke auf der rechten Seite dieser Gleichungen den Bedingungen der Integrabilität des Systems Genüge leisten. Durch Einführung von Polarcoordinaten reduciren sich dieselben auf

$$(22.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial r} = \quad 2nkr\,\dfrac{\partial P}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -2nkr\,\dfrac{\partial P}{\partial r}. \end{cases}$$

Mit Rücksicht darauf, dass P als Potentialfunction ausserhalb des Leiters gelegener Massen die Gleichung

$$\frac{\partial\left(r\dfrac{\partial P}{\partial r}\right)}{\partial r} + r\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

erfüllt, erhält man

$$(23.) \qquad V = 2nk\int\left(r\frac{\partial P}{\partial z}\,dr - r\frac{\partial P}{\partial r}\,dz\right).$$

Werden die Gleichungen (21.) beziehungsweise nach x, y, z differentiirt und addirt, so folgt

$$(24.) \qquad \Delta V = 4nk\frac{\partial P}{\partial z} = -4\pi\varepsilon,$$

wodurch die Dichtigkeit ε der freien Elektricität für jeden Punkt im Innern des Leiters bestimmt ist. Um auch die Dichtigkeit e für einen beliebigen Punkt der Oberfläche zu finden, bemerke man, dass durch die Gleichung (23.) der Werth von V für jeden Punkt der Oberfläche gegeben ist, und dass im ganzen äusseren Raum die Gleichung $\Delta V = 0$ erfüllt sein und in unendlicher Entfernung V verschwinden muss. Durch diese Bedingungen ist auch V_a im ganzen äusseren Raum bestimmt, und man erhält, wie bekannt,

$$(25.) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_a - \left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_i = -4\pi e.$$

Rotirt eine Kugel unter dem Einfluss einer constanten magnetischen Kraft, deren Richtung mit der Rotationsaxe zusammenfällt, so ist

$$\frac{\partial P}{\partial z} = T = \text{const.},$$

woraus

$$V_i = nkTr^2 + \text{const.},$$

oder wenn R den Kugelradius, ϑ den Winkel, welchen ein beliebiger Kugelradius mit der Z-Axe einschliesst, bezeichnet, so ist für jeden Punkt der Kugeloberfläche

$$\overline{V} = nkTR^2 \sin^2\vartheta + C.$$

Nach bekannten Methoden findet man

$$V_a = \left(C + \frac{2nkTR^2}{3}\right)\frac{R}{\varrho_a} - (\cos^2\vartheta - \tfrac{1}{3})\, nkTR^2 \left(\frac{R}{\varrho_a}\right)^3,$$

wenn ϱ_a die Entfernung eines beliebigen äusseren Punktes vom Kugelmittelpunkt bezeichnet, während für einen inneren Punkt

$$V_i = nkT\varrho_i^2 \sin^2\vartheta + C$$

ist. Daraus folgt:

$$e = -\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial V_a}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=R} - \left(\frac{\partial V_i}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=R}\right],$$

$$e = \frac{C}{4\pi R} + \frac{nkTR}{2\pi}\left(\tfrac{11}{6} - \tfrac{5}{2}\cos^2\vartheta\right).$$

Dieses ist die Dichtigkeit der Elektricität auf der Kugeloberfläche, während das Innere der Kugel mit freier Elektricität von der constanten Dichtigkeit

$$\varepsilon = -\frac{nkT}{\pi}$$

erfüllt ist. Die Constante C bestimmt sich aus der willkürlichen Gesammtmenge der freien Elektricität, welche auf der Kugel vorhanden ist. Es ist

nämlich die ganze im Innern der Kugel vorhandene Menge

$$-\tfrac{4}{3}\,nkTR^3,$$

die ganze auf der Oberfläche vorhandene Menge

$$CR+2nkTR^3.$$

Soll die Summe aller vorhandenen freien Elektricität gleich Null sein, so wird

$$C = -\tfrac{2}{3}nkTR^2,$$

mithin

$$e = \frac{nkTR}{2\pi}\{\tfrac{5}{2}\sin^2\vartheta - 1\}.$$

Rotirt ein beliebig gestalteter Umdrehungskörper unter dem Einfluss eines in der Umdrehungsaxe liegenden Magnetpoles μ, so ist, wenn c die Entfernung des Poles vom Anfangspunkt der Coordinaten bezeichnet,

$$P = \frac{\mu}{\sqrt{r^2+(c-z)^2}},$$

$$V_i = -\frac{2nk\mu(c-z)}{\sqrt{r^2+(c-z)^2}} + \text{const.}$$

Bezeichnet γ den Winkel, welchen die Verbindungslinie zwischen dem betrachteten Punkt und dem Magnetpol mit der Umdrehungsaxe einschliesst, so wird

$$V_i = -2nk\mu\cos\gamma + \text{const.}$$

Sind $\overline{V_1}$ und $\overline{V_2}$ die Werthe des Potentials der freien Elektricität an zwei Punkten der Oberfläche des Leiters, so ist

$$\overline{V_1} - \overline{V_2} = -2nk\mu(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2).$$

Werden die beiden Punkte durch einen ruhenden Leitungsdraht von bedeutendem Widerstande verbunden, so entsteht in diesem ein Strom, dessen Intensität der Differenz der Potentialwerthe, also jener Cosinusdifferenz proportional ist (*Webers* unipolare Induction). Im Fall einer Kugel hat man nach einer von *Green* gegebenen Formel

$$V_a = \frac{\varrho^2-R^2}{4\pi R}\iint\overline{V}\,\frac{dS}{\mathfrak{r}^3},$$

wenn $\overline{V}$ den Werth von V in dem Element dS der Kugeloberfläche, ϱ die Entfernung des äusseren Punktes vom Kugelmittelpunkt und $\mathfrak{r}$ seine Entfernung vom Element dS bezeichnet. Die Integration ist über die ganze Oberfläche der Kugel auszudehnen. Im vorliegenden Fall wird

$$V_a = -nk\mu\,\frac{\varrho^2-R^2}{2\pi R}\iint\frac{\overline{\cos\gamma}\,dS}{\mathfrak{r}^3}.$$

* * *

5. Die Lösung des allgemeinen Problemes vereinfacht sich bedeutend unter der Annahme, dass die Rotationsgeschwindigkeit und somit die Intensität der inducirten Ströme hinreichend klein ist, um die Induction zwischen den verschiedenen Theilen der Scheibe gegen die directe inducirende Wirkung des Magnets vernachlässigen zu können *), wodurch sich die Ausdrücke (11.) auf ihre ersten Glieder reduciren. Es sind nämlich, wenn n wie oben die Rotationsgeschwindigkeit bezeichnet, die wirkenden elektromotorischen Kräfte und mithin die erzeugten Stromdichtigkeiten u, v, w Grössen von der Ordnung nk. Von derselben Ordnung sind daher die in Klammern stehenden und mit k multiplicirten Ausdrücke in den zweiten Gliedern der Werthe für L, M, N. Die von diesen Gliedern herrührenden Theile der Ausdrücke nL, nM, nN in den Gleichungen (15 *.) sind daher Grössen von der Ordnung n^2k^2. Bei dem sehr kleinen Werth der Inductionsconstante k können dieselben also noch bei ziemlich beträchtlichen Drehungsgeschwindigkeiten ohne merklichen Fehler gegen die Glieder von der Ordnung nk vernachlässigt werden, wodurch die Gleichungen (15 *.) übergehen in:

$$(26.)\qquad \begin{cases} u = K\left\{-\dfrac{\partial V}{\partial x}+2nkx\dfrac{\partial P}{\partial z}\right\}, \\ v = K\left\{-\dfrac{\partial V}{\partial y}+2nky\dfrac{\partial P}{\partial z}\right\}, \\ w = K\left\{-\dfrac{\partial V}{\partial z}-2nk\left(x\dfrac{\partial P}{\partial x}+y\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}. \end{cases}$$

Die Gleichung (16.) geht demnach über in

$$(27.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4nk\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Es handelt sich also nur noch darum, die letztere Gleichung mit Rücksicht auf die Grenzbedingung

$$(28.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{dx}\cos\lambda+\dfrac{\partial V}{\partial y}\cos\mu+\dfrac{\partial V}{\partial z}\cos\nu \\ = 2nk(x\cos\lambda+y\cos\mu)\dfrac{\partial P}{\partial z}-2nk\cos\nu\left(x\dfrac{\partial P}{\partial x}+y\dfrac{\partial P}{\partial y}\right) \end{cases}$$

zu integriren, worauf sich u, v, w durch einfache Differentiation ergeben.

Als Beispiel soll der Fall einer von zwei parallelen Ebenen begrenzten unendlichen Scheibe von beliebiger Dicke behandelt werden, welche unter

*) Diese vereinfachende Voraussetzung ist übrigens in allen früheren auf den Gegenstand bezüglichen Arbeiten stillschweigend gemacht worden.

dem Einfluss eines ausserhalb derselben gelegenen Magnetpoles um eine zu den Begrenzungsebenen senkrechte Axe rotirt. Es sei 2δ die Dicke der Scheibe:

$$z = \delta \quad \text{und} \quad z = -\delta$$

seien die Gleichungen der Begrenzungsebenen, a, b, c die Coordinaten des inducirenden Poles μ, mithin

$$(29.) \qquad P = \frac{\mu}{\varrho},$$

wenn

$$\varrho = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

die Entfernung eines Punktes von dem Pol bezeichnet.

Die Grenzbedingung ist erfüllt, wenn für $z = \pm\delta$

$$w = 0$$

oder

$$(28^*.) \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -2nk\left(x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

ist. Es soll gezeigt werden dass den Gleichungen (26.) und (27.) durch die Annahme genügt werden kann, dass überhaupt $w = 0$ ist, d. h. dass alle Strömungen in zu den Grenzflächen der Scheibe parallelen Ebenen erfolgen. Es ist dann

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -2nk\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

woraus nach (27.) folgt:

$$(30.) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2nk\frac{\partial}{\partial z}\left\{2P+x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}\right\}.$$

Man genügt dieser Gleichung durch die Substitution

$$(31.) \qquad V = 2nk\mu\frac{\partial W}{\partial z},$$

wenn man unter W mit Rücksicht auf den Werth von P eine Lösung der Gleichung versteht:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{2}{\varrho}-\frac{x(x-a)+y(y-b)}{\varrho^3}.$$

Bemerkt man, dass

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} = \frac{2}{\varrho}-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{\varrho^3}$$

ist, so folgt

$$(32.) \qquad \frac{\partial^2 (W-\varrho)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 (W-\varrho)}{\partial y^2} = -\frac{a(x-a)+b(y-b)}{\varrho^3}.$$

Verlegt man zur Vereinfachung den Anfangspunkt der Coordinaten in den inducirenden Pol, indem man

$$x-a=\xi, \quad y-b=\eta, \quad c-z=\zeta$$

setzt, so überzeugt man sich leicht, dass die Gleichung (32.) durch das Integral

$$(33.) \qquad W = \varrho+\frac{a\xi+b\eta}{\varrho\pm\zeta}$$

befriedigt wird, woraus sich ferner ergiebt

$$V=2nk\mu\frac{\partial W}{\partial z}=2nk\mu\left\{-\frac{\zeta}{\varrho}\pm\frac{a\xi+b\eta}{\varrho(\varrho\pm\zeta)}\right\}.$$

Für das gegenwärtige Problem ist nur das obere Vorzeichen zulässig, indem V die Eigenschaften einer Potentialfunction besitzen, d. h. im Innern des Leiters überall endlich und stetig bleiben und für $\xi=\infty$ oder $\eta=\infty$ nebst seinen Differentialquotienten verschwinden muss. Es ist leicht ersichtlich, dass der Werth

$$(34.) \qquad V = 2nk\mu\left\{-\frac{\zeta}{\varrho}+\frac{a\xi+b\eta}{\varrho(\varrho+\zeta)}\right\}$$

nicht nur für jeden inneren Punkt den Gleichungen (27.) und (28*.) genügt, sondern auch die soeben angegebenen Eigenschaften besitzt, so lange ζ von Null verschieden ist, d. h. so lange sich der inducirende Pol in endlicher Entfernung von der Grenzfläche des Leiters befindet, während der dem negativen Vorzeichen entsprechende Werth von V für $\xi=0$ und $\eta=0$ unstetig wird.

Aus (26.) folgt mit Rücksicht auf (29.) und (31.)

$$u=2nk\mu K\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{\varrho}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)=2nk\mu K\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{\varrho}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{a\xi+b\eta}{\varrho+\zeta}\right),$$

$$v=2nk\mu K\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{\varrho}-\frac{\partial W}{\partial y}\right)=2nk\mu K\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b}{\varrho}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{a\xi+b\eta}{\varrho+\zeta}\right).$$

Wie leicht ersichtlich lassen sich diese Werthe von u und v in der Form schreiben

$$u=2nk\mu K\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{a\eta-b\xi}{\varrho+\zeta}\right)=2nk\mu K\frac{\partial}{\partial y}\frac{a\eta-b\xi}{\varrho(\varrho+\zeta)},$$

$$v=2nk\mu K\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{b\xi-a\eta}{\varrho+\zeta}\right)=2nk\mu K\frac{\partial}{\partial x}\frac{b\xi-a\eta}{\varrho(\varrho+\zeta)},$$

oder nach Einführung der ursprünglichen Coordinaten x, y, z:

$$(35.) \qquad \begin{cases} u = 2nk\mu K\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{ay-bx}{\varrho(\varrho+c-z)}, \\ v = 2nk\mu K\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{bx-ay}{\varrho(\varrho+c-z)}. \end{cases}$$

Die Gleichung der *Strömungscurven* wird dann

$$v\,dx - u\,dy = 0.$$

Die Integration ergiebt

$$(36.) \qquad \frac{bx-ay}{\varrho(\varrho+c-z)} = \text{const.}$$

Die in den Gleichungen (34.), (35.) und (36.) enthaltene Lösung des Problems kann, wie aus der linearen Form der Differentialgleichung für V hervorgeht, unmittelbar auf eine beliebige Anzahl von Polen ausgedehnt werden. Man erhält:

$$(34^*.) \qquad V = 2nk\Sigma\mu\left\{-\frac{c-z}{\varrho}+\frac{a(x-a)+b(y-b)}{\varrho(\varrho+c-z)}\right\},$$

$$(35^*.) \qquad \begin{cases} u = -2nkK\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}, \\ v = +2nkK\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}, \end{cases}$$

wenn

$$\Psi = \Sigma\frac{\mu(bx-ay)}{\varrho(\varrho+c-z)}$$

gesetzt wird, woraus sich die Gleichung

$$(36^*.) \qquad \Psi = \text{const.}$$

für die Strömungscurven ergiebt.

6. Im Falle *eines* inducirenden Poles kann man zur Vereinfachung die Axe der X durch den Pol legen, wodurch $b=0$ wird, und man erhält, wenn die Coordinaten ξ, η, ζ eingeführt werden,

$$(37.) \qquad \begin{cases} u = 2nk\mu Ka\dfrac{\partial}{\partial\eta}\dfrac{\eta}{\varrho(\varrho+\zeta)} = 2nk\mu Ka\dfrac{\varrho^2(\varrho+\zeta)-\eta^2(2\varrho+\zeta)}{\varrho^3(\varrho+\zeta)^2}, \\ v = -2nk\mu Ka\dfrac{\partial}{\partial\xi}\dfrac{\eta}{\varrho(\varrho+\zeta)} = 2nk\mu Ka\dfrac{\xi\eta(2\varrho+\zeta)}{\varrho^3(\varrho+\zeta)^2}, \end{cases}$$

worin a die Entfernung des Pols von der Rotationsaxe bezeichnet. Die Gleichung der Strömungscurven wird

$$(38.) \qquad \frac{\eta}{\varrho(\varrho+\zeta)} = C.$$

Es ergiebt sich daraus zunächst das bemerkenswerthe Resultat, *dass die Form der von einem einzigen Pol inducirten Strömungscurven von der Entfernung des Pols von der Umdrehungsaxe unabhängig ist*, während, wie die Ausdrücke (37.) zeigen, die Stromdichtigkeit dieser Entfernung proportional ist und für $a=0$ verschwindet. Die Gleichung (38.) stellt ein System

von Curven vierten Grades dar, von welchen jedoch nur diejenigen Zweige dem Problem entsprechen, welche dem positiven Werth von

$$\varrho = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

angehören. Die Strömungen erfolgen in zu den Grenzflächen der Scheibe parallelen Ebenen; der Parameter ζ charakterisirt die ganze der Ebene $\zeta = c-z$ angehörige Schaar von Strömungscurven, während die Constante C sich innerhalb einer Ebene von einer Curve zur anderen ändert. Das nach der Gleichung (38.) construirte System der einer Ebene angehörigen Strömungscurven ist auf der beigehefteten Tafel dargestellt, indem dabei die Entfernung des inducirenden Poles von der Ebene der Zeichnung in einer willkürlichen Einheit gleich 0,5 angenommen und durch die Linie AB angegeben ist.

Da v für $\eta = 0$ verschwindet, so folgt, dass keine Curve die ξ-Axe schneidet. Der Nenner des Ausdrucks (38.) ist immer positiv; es entsprechen also positiven Werthen der Constante C nur positive und negativen nur negative η. Ist $C = 0$, so ist für jeden Werth von ξ auch $\eta = 0$ und die diesem Werth von C entsprechende Curve reducirt sich auf die ξ-Axe. Die gleichen aber entgegengesetzten Werthen von C entsprechenden Curven sind symmetrisch in Beziehung auf die Axe der ξ. Jede einzelne Curve ist symmetrisch in Beziehung auf die Axe der η, indem ihre Gleichung nur ξ^2 enthält. Mit Ausnahme der Curve $C = 0$ sind alle Curven geschlossen, denn da für reelle Werthe von ξ immer $\frac{\eta}{\varrho} < 1$ ist, so muss der Werth des Quotienten (38.) mit wachsendem ϱ bis unter jede angebbare Grösse herabsinken. Ebenso ist ersichtlich dass η für ein gegebenes C nicht unter eine bestimmte Grenze sinken kann. Dem grössten und kleinsten zulässigen Werth von ϱ und η entspricht $\xi = 0$. Jede Curve schneidet also die Axe der η in zwei reellen Punkten und alle Curven schliessen sich um zwei auf dieser Axe in gleicher Entfernung von der ξ-Axe gelegene Punkte, für welche C ein Maximum oder $u = 0$, $v = 0$ ist, und welche der Kürze halber Wirbelpunkte genannt werden sollen. Zur Bestimmung der Coordinaten dieser Punkte hat man die Gleichungen

$$\xi\eta(2\varrho+\zeta) = 0,$$
$$\varrho^2(\varrho+\zeta) = \eta^2(2\varrho+\zeta).$$

Da ϱ immer positiv ist, so kann in Folge der zweiten Gleichung η nicht Null sein. Es folgt also aus der ersten Gleichung $\xi = 0$, mithin $\varrho^2 = \eta^2+\zeta^2$, wodurch die zweite Gleichung schliesslich übergeht in

$$\eta^4-\eta^2\zeta^2-\zeta^4 = 0,$$

woraus

$$\eta = \pm\zeta\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Der diesen Wirbelpunkten entsprechende Maximumwerth von C ist

$$C = \pm\frac{\zeta^4}{\eta^5} = \pm\frac{1}{\zeta}\sqrt{\frac{2}{11+5\sqrt{5}}}.$$

Grösseren positiven oder negativen Werthen von C entsprechen keine reellen Strömungscurven.

Die Wirbelpunkte der verschiedenen Ebenen angehörigen Stromsysteme liegen auf zwei im inducirenden Pol unter einem Winkel von etwa $103^0 39'$ sich schneidenden Geraden. In dem Grenzfall, wo der Pol sich der Oberfläche der Scheibe ins Unendliche annähert oder wo an der Oberfläche $\zeta = 0$ wird, rücken die beiden Wirbelpunkte unendlich nahe an einander und die Strömungscurven gehen in ein System von Kreisen

$$\eta = C(\xi^2+\eta^2)$$

über, welche die Axe der ξ zur gemeinschaftlichen Tangente haben. Es ist dies dasselbe System von Kreisen, welches *Felici* für den Fall gefunden, wo der Pol in der Ebene der unendlich dünnen Scheibe liegt. Es ist jedoch zu beachten, dass dieser Fall in der That nur als Grenzfall zulässig ist, indem die elektromotorische Kraft, welche $\frac{\partial P}{\partial z}$ proportional ist, für alle Punkte der Scheibe gleich Null wird, mit Ausnahme des Punktes $\xi = 0$, $\eta = 0$, wo dieselbe nebst dem Potential V und der Stromintensität unendlich wird.

Die Componenten der Wirkung eines geschlossenen Stromsystems auf einen ausserhalb des Leiters im Punkte x, y, z befindlichen Magnetpol m sind bekanntlich

$$L' = m\int\frac{v'(z'-z)-w'(y'-y)}{r^3}dx'dy'dz',$$

$$M' = m\int\frac{w'(x'-x)-u'(z'-z)}{r^3}dx'dy'dz',$$

$$N' = m\int\frac{u'(y'-y)-v'(x'-x)}{r^3}dx'dy'dz'$$

oder

$$L' = m\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right), \quad M' = m\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right), \quad N' = m\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}\right),$$

wenn den Integralen α, β, γ für äussere Punkte dieselbe Bedeutung beigelegt wird, wie früher für innere Punkte. Im gegenwärtigen Fall ist

$$\gamma = 0.$$

Setzt man

$$(39.)\qquad Q = 2nk\mu Ka\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{c-\delta}^{c+\delta}\frac{\eta'}{\varrho'(\varrho'+\zeta')}\,\frac{d\xi' d\eta' d\zeta'}{r}$$

und

$$(40.)\qquad R = -\frac{\partial Q}{\partial \xi} = -2nk\mu Ka\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{c-\delta}^{c+\delta}\frac{\eta'}{\varrho'(\varrho'+\zeta')}\,\frac{\zeta'-\zeta}{r^3}\,d\xi' d\eta' d\zeta',$$

so wird durch theilweise Integration, indem $\frac{\eta}{\varrho(\varrho+\zeta)}$ im Unendlichen verschwindet,

$$\alpha = 2nk\mu Ka\int\frac{\partial\,\frac{\eta'}{\varrho'(\varrho'+\zeta')}}{\partial\eta'}\,\frac{d\xi' d\eta' d\zeta'}{r} = -2nk\mu Ka\int\frac{\eta'}{\varrho'(\varrho'+\zeta')}\,\frac{\eta-\eta'}{r^3}\,d\xi' d\eta' d\zeta' = \frac{\partial Q}{\partial \eta},$$

$$\beta = -2nk\mu Ka\int\frac{\partial\,\frac{\eta'}{\varrho'(\varrho'+\zeta')}}{\partial\xi'}\,\frac{d\xi' d\eta' d\zeta'}{r} = 2nk\mu Ka\int\frac{\eta'}{\varrho'(\varrho'+\zeta')}\,\frac{\xi-\xi'}{r^3}\,d\xi' d\eta' d\zeta' = -\frac{\partial Q}{\partial \xi},$$

mithin

$$(41.)\qquad \begin{cases} L' = m\,\dfrac{\partial^2 Q}{\partial\xi\,\partial\zeta} = -m\,\dfrac{\partial R}{\partial\xi} = -m\,\dfrac{\partial R}{\partial x}, \\ M' = m\,\dfrac{\partial^2 Q}{\partial\eta\,\partial\zeta} = -m\,\dfrac{\partial R}{\partial\eta} = -m\,\dfrac{\partial R}{\partial y}, \\ N' = m\left(\dfrac{\partial^2 Q}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 Q}{\partial\eta^2}\right) = -m\,\dfrac{\partial^2 Q}{\partial\zeta^2} = -m\,\dfrac{\partial R}{\partial z}. \end{cases}$$

Es stellt also R das Potential derjenigen magnetischen Vertheilung dar, durch welche das inducirte Stromsystem hinsichtlich seiner Wirkung auf einen ausserhalb des Leiters befindlichen Magnetpol ersetzt werden kann.

Ich behalte mir vor an einem anderen Orte die in vorstehender Abhandlung gewonnenen Resultate mit den vorhandenen Beobachtungen zu vergleichen und bei dieser Gelegenheit auch auf die Modificationen zurückzukommen, welche dieselben durch den Umstand erfahren können, dass bei grösseren Rotationsgeschwindigkeiten die Inductionswirkung zwischen den verschiedenen Theilen der Scheibe in merkbarer Weise hervortritt.

Berlin, im November 1863.

Zur Involution.

(Von Herrn *Otto Hesse* zu Heidelberg.)

Wenn drei Punktenpaare aa', bb' und cc' auf einer geraden Linie eine Involution bilden, so hat man zwischen den Entfernungen dieser Punkte die folgenden sieben Gleichungen; und umgekehrt, jede von diesen Gleichungen ist die Bedingung für die Involution, aus welcher die sechs anderen folgen.

$$ab.ab'.a'c.a'c' - a'b.a'b'.ac.ac' = 0,$$
$$bc.bc'.b'a.b\,a' - b'c.b'c'.ba.ba' = 0,$$
$$ca.ca'.c'b.c'b' - c'a.c'a'.cb.cb' = 0,$$
$$ab'.bc'.ca' + a'b.b'c.c'a = 0,$$
$$ab'.bc.c'a' + a'b.b'c'.ca = 0,$$
$$ab.b'c'.ca' + a'b'.bc.c'a = 0,$$
$$ab.b'c.c'a' + a'b'.bc'.ca = 0.$$

Von diesen sieben Fundamentalgleichungen der Involution ausgehend stellen wir folgende Betrachtungen an.

Drückt man die Entfernungen der sechs Punkte der Involution, wie sie in den angegebenen Gleichungen vorkommen, durch die Entfernungen x_1, x_2, ... x_6 derselben Punkte von einem beliebig auf der geraden Linie, auf welcher die sechs Punkte liegen, angenommenen Punkte aus, so werden die linken Theile obiger Gleichungen sieben ganze Functionen F der sechs Grössen x_1, x_2, ... x_6.

Werden diese sechs Grössen x als willkührliche genommen, so verschwindet keine von den sieben Functionen F. Sobald aber die sechs Grössen solche Werthe annehmen, dass eine jener sieben Functionen F verschwindet, verschwinden mit ihr auch die sechs anderen.

Es können daher die sieben Functionen F der sechs willkührlichen Grössen x nur durch gewisse Factoren von einander unterschieden sein.

Diese Factoren zu ermitteln ist von Interesse, weil die Producte dieser Factoren und der ihnen entsprechenden Functionen F sieben identische Functionen der sechs willkührlichen Grössen x ergeben, die in der Form sich wesentlich von einander unterscheiden.

Die sieben Functionen F der sechs willkührlichen Grössen x sind folgende:

$$(1.)\quad \begin{cases} F_{12} = (x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_5)(x_2-x_6)-(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_1-x_5)(x_1-x_6), \\ F_{34} = (x_3-x_5)(x_3-x_6)(x_4-x_1)(x_4-x_2)-(x_4-x_5)(x_4-x_6)(x_3-x_1)(x_3-x_2), \\ F_{56} = (x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_4)-(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4), \\ F_1 = (x_4-x_1)(x_6-x_3)(x_2-x_5)+(x_3-x_2)(x_5-x_4)(x_1-x_6), \\ F_2 = (x_4-x_1)(x_5-x_3)(x_2-x_6)+(x_3-x_2)(x_6-x_4)(x_1-x_5), \\ F_3 = (x_3-x_1)(x_6-x_4)(x_2-x_5)+(x_4-x_2)(x_5-x_3)(x_1-x_6), \\ F_4 = (x_3-x_1)(x_5-x_4)(x_2-x_6)+(x_4-x_2)(x_6-x_3)(x_1-x_5). \end{cases}$$

Ein bekannter algebraischer Satz lässt sich in dem speciellen Falle, der hier eine Anwendung findet, so wiedergeben: *Wenn man mit* $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_6$ *die Producte der Differenzen von irgend 6 Grössen* x *bezeichnet:*

$$\pi_1 = (x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_6), \quad \pi_2 = (x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_6), \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \pi_6 = (x_6-x_1)(x_6-x_2)\cdots(x_6-x_5),$$

wenn ferner $\varphi(x)$ *irgend eine ganze Function von* x *des vierten Grades ist, so hat man identisch:*

$$\frac{\varphi(x_1)}{\pi_1}+\frac{\varphi(x_2)}{\pi_2}+\cdots+\frac{\varphi(x_6)}{\pi_6} = 0.$$

Wenn man für die ganze Function des vierten Grades setzt: $\varphi(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)^2$, so verschwinden die beiden ersten Glieder in der angegebenen identischen Gleichung. Vereiniget man die beiden folgenden Glieder ebenso wie die beiden letzten, so erhält man nach Unterdrückung der gleichen Factoren:

$$\frac{F_{34}}{x_3-x_4} = \frac{F_{56}}{x_5-x_6}.$$

In dieser identischen Gleichung kann man auch x_1 und x_2 mit x_3 und x_4 oder mit x_5 und x_6 vertauschen, weil diese Vertauschungen erlaubt sind in der identischen Gleichung, aus welcher sie hervorgegangen ist. Auf diese Weise erhält man:

$$\frac{F_{12}}{x_1-x_2} = \frac{F_{34}}{x_3-x_4} = \frac{F_{56}}{x_5-x_6}.$$

Setzt man, um auf die anderen Functionen F zu kommen, $x_1-x_2 = \varepsilon$, so wird:

$$\frac{F_{12}}{x_1-x_2} = \frac{\{x_2-x_3+\varepsilon\}\{x_2-x_4+\varepsilon\}(x_2-x_5)(x_2-x_6)-\{x_2-x_5+\varepsilon\}\{x_2-x_6+\varepsilon\}(x_2-x_3)(x_2-x_4)}{\varepsilon}.$$

Entwickelt man nach Potenzen von ε und dividirt durch ε, so wird die rechte Seite

$$\{x_2-x_3+x_2-x_4+\varepsilon\}(x_2-x_5)(x_2-x_6)$$
$$-\{x_2-x_5+x_2-x_6+\varepsilon\}(x_2-x_3)(x_2-x_4)$$

und wenn man den Werth von $\varepsilon = x_1-x_2$ wieder einsetzt:

$$\{(x_2-x_3)+(x_1-x_4)\}(x_2-x_5)(x_2-x_6)$$
$$-\{(x_2-x_5)+(x_1-x_6)\}(x_2-x_3)(x_2-x_4).$$

Vereinigt man die Glieder der Entwickelung, welche die Factoren (x_2-x_3) und (x_2-x_5) enthalten, und lässt die übrigen Glieder folgen, so hat man:

$$(x_2-x_3)(x_2-x_5)(x_4-x_6)-(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_1-x_6)+(x_2-x_5)(x_2-x_6)(x_1-x_4).$$

Setzt man dafür:

$$\{(x_2-x_1)+(x_1-x_3)\}(x_2-x_5)(x_4-x_6)-\{(x_2-x_5)+(x_5-x_3)\}(x_2-x_4)(x_1-x_6)$$
$$+(x_2-x_5)(x_2-x_6)(x_1-x_4)$$

und entwickelt wieder, so erhält man:

$$(x_1-x_3)(x_2-x_5)(x_4-x_6)-(x_5-x_3)(x_2-x_4)(x_1-x_6)$$
$$+(x_2-x_5)\{(x_2-x_1)(x_4-x_6)-(x_2-x_4)(x_1-x_6)+(x_2-x_6)(x_1-x_4)\}.$$

Es zerstören sich hier die letzten Glieder, so dass nur die beiden ersten übrig bleiben, deren Summe gleich F_3 ist.

Man hat daher:

$$\frac{F_{12}}{x_1-x_2} = F_3.$$

Da aber der linke Theil dieser Gleichung ungeändert bleibt, wenn man x_1 mit x_2 oder x_3 mit x_4 oder endlich x_5 mit x_6 vertauscht, so hat man schliesslich:

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{F_{12}}{x_1-x_2} = \dfrac{F_{34}}{x_3-x_4} = \dfrac{F_{56}}{x_5-x_6} \\ = F_1 = F_2 = F_3 = F_4. \end{cases}$$

Um eine Anwendung von diesen Formeln zu machen, stellen wir, unter der Annahme, dass die sechs Grössen x beliebig gegeben seien, die Gleichungen auf:

$$(3.)\quad \begin{cases} (\alpha-x_1)(\alpha-x_2)(\beta-x_4)(\beta-x_5)-(\alpha-x_4)(\alpha-x_5)(\beta-x_1)(\beta-x_2)=0, \\ (\alpha-x_2)(\alpha-x_3)(\beta-x_5)(\beta-x_6)-(\alpha-x_5)(\alpha-x_6)(\beta-x_2)(\beta-x_3)=0, \\ (\alpha-x_3)(\alpha-x_4)(\beta-x_6)(\beta-x_1)-(\alpha-x_6)(\alpha-x_1)(\beta-x_3)(\beta-x_4)=0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gehen in einander über, wenn man für den Index 6 den Index 1 setzt und die übrigen Indices um eine Einheit erhöht.

Von diesen Gleichungen ist ferner eine die Folge der beiden anderen. Denn multiplicirt man dieselben auf einander folgend mit den Factoren:

$$(\alpha-x_3)(\beta-x_6), \quad -(\alpha-x_1)(\beta-x_4), \quad (\alpha-x_5)(\beta-x_2)$$

und addirt, so sieht man, ohne die Producte aufzulösen, dass man identisch Null erhält.

Es brauchen daher nur zwei von den drei Gleichungen (3.) erfüllt zu sein, die dritte wird von selber erfüllt. Da aber zwei von diesen Gleichungen durch gewisse Werthe von α und β immer erfüllt werden können, so erfüllen auch die durch diese beiden Gleichungen bestimmten Werthe der Unbekannten die dritte Gleichung.

Jede der drei Gleichungen ist die Bedingung für die Involution von sechs Punkten auf einer geraden Linie und die drei Gleichungen selbst drücken analytisch den Satz aus:

„*Wenn irgend sechs Punkte* 1, 2, ... 6 *auf einer geraden Linie ge-*
„*geben sind, so giebt es immer ein Punktenpaar* $\alpha\beta$, *welches gleichzeitig*
„*mit den beiden Punktenpaaren* 12 *und* 45, *mit den beiden Punktenpaaren*
„23 *und* 56 *und mit den beiden Punktenpaaren* 34 *und* 61 *eine In-*
„*volution bildet.*"

Dividirt man jede von den Gleichungen (3.) durch $\alpha-\beta$, so erhält man mit Rücksicht auf (2.):

$$(4.)\qquad \begin{cases} (x_2-\alpha)(x_5-x_1)(\beta-x_4)+(x_1-\beta)(x_4-x_2)(\alpha-x_5) = 0, \\ (x_3-\alpha)(x_6-x_2)(\beta-x_5)+(x_2-\beta)(x_5-x_3)(\alpha-x_6) = 0, \\ (x_4-\alpha)(x_1-x_3)(\beta-x_6)+(x_3-\beta)(x_6-x_4)(\alpha-x_1) = 0. \end{cases}$$

In dieser Form sieht man es den Gleichungen nicht mehr an, dass sie einzeln mit den angegebenen Factoren multiplicirt und addirt identisch Null geben. Wir legen darauf auch weiter kein Gewicht, behalten aber die Eigenschaft dieser Gleichungen im Auge, dass die Werthe von α und β, wie sie sich aus zwei Gleichungen ergeben, auch der dritten genügen.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Werthe von α und β sich aus zwei von jenen Gleichungen ergeben.

Entwickeln wir zu diesem Zwecke die Gleichungen (4.), so nehmen sie die Form an:

$$(5.)\qquad \begin{cases} A_1\alpha\beta+B_1(\alpha+\beta)+C_1 = 0, \\ A_2\alpha\beta+B_2(\alpha+\beta)+C_2 = 0, \\ A_3\alpha\beta+B_3(\alpha+\beta)+C_3 = 0, \end{cases}$$

in welcher die 9 Coefficienten A, B, C gewisse Functionen der sechs gegebenen Grössen x bedeuten.

Es sind dieses lineare Gleichungen, wenn man die Grössen $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ als die Unbekannten betrachtet. Löset man zwei Gleichungen nach den Unbekannten auf, so erhält man Gleichungen von der Form:

$$\alpha+\beta=A, \quad \alpha\beta=B,$$

und man kann daraus eine quadratische Gleichung bilden:

$$(6.) \qquad \lambda^2-A\lambda+B = 0,$$

deren Wurzeln die gesuchten Grössen α und β sind.

Die Gleichungen (5.) sind in Rücksicht auf die Unbekannten $(\alpha+\beta)$ und $\alpha\beta$ lineare Gleichungen, welche für ein bestimmtes Werthsystem der Unbekannten zugleich erfüllt werden. Man kann deshalb drei Factoren ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 der Art bestimmen, dass, wenn man die Gleichungen mit diesen Factoren einzeln multiplicirt und hierauf addirt, die Summe unabhängig von den Werthen der Unbekannten identisch verschwindet.

Diese Eigenschaft behalten auch die drei folgenden Gleichungen bei, welche aus (5.) dadurch hervorgehen, dass man für $(\alpha+\beta)$ setzt $2x$ und für $\alpha\beta$ setzt x^2

$$(7.) \qquad \begin{cases} A_1x^2+2B_1x+C_1 = 0, \\ A_2x^2+2B_2x+C_2 = 0, \\ A_3x^2+2B_3x+C_3 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestehen aber nicht mehr zugleich, wie die vorhergehenden, aus welchen sie auf die angegebene Art hervorgegangen sind. Wollen wir daher die hervorgehobene Eigenschaft derselben, dass sie einzeln mit den Factoren ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 multiplicirt und addirt identisch Null geben, weiter verwerthen, so müssen wir sie einzeln geometrisch interpretiren.

Die erste Gleichung (5.) ist die Bedingung, dass die Punktenpaare $\alpha\beta$, 12, 45 eine Involution bilden. Durch diese eine Gleichung ist das erste Punktenpaar $\alpha\beta$ nicht bestimmt, wenn die beiden anderen Punktenpaare gegeben sind. Für jeden Punkt α giebt es einen entsprechenden Punkt β. Man kann daher nach der Lage des Punktes α fragen, dessen entsprechender Punkt β mit dem Punkte α zusammenfällt. Wenn wir diese beiden Lagen des Punktes α als ein Punktenpaar auffassen, so ist die erste Gleichung (7.) der analytische Ausdruck dieses Punktenpaares.

Wir bringen nun den bekannten Satz in Erinnerung: *Wenn auf einer geraden Linie zwei Punktenpaare gegeben sind, so giebt es unendlich viele*

Punktenpaare, welche mit den gegebenen eine Involution bilden, aber es giebt nur zwei Punkte, in welchen eins von diesen Punktenpaaren zusammenfällt und diese beiden Punkte sind harmonisch zu dem einen wie zu dem anderen gegebenen Punktenpaare.

Daraus ist ersichtlich, dass die erste Gleichung (7.) dasjenige Punktenpaar analytisch darstellt, welches harmonisch ist sowohl zu dem gegebenen Punktenpaar 12 als zu dem gegebenen Punktenpaar 45. Die zweite Gleichung (7.) stellt ebenso das Punktenpaar dar, welches harmonisch ist zu den Punktenpaaren 23 und 56. Die dritte Gleichung (7.) endlich ist der analytische Ausdruck für dasjenige Punktenpaar, welches harmonisch ist zu den Punktenpaaren 34 und 61.

Um nun die oben hervorgehobene Eigenschaft der drei Gleichungen (7.) geometrisch zu verwerthen, benutzen wir den bekannten Satz: *Wenn drei quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten analytisch drei Punktenpaare auf einer geraden Linie darstellen, so bilden die drei Punktenpaare eine Involution unter der Bedingung, dass die Gleichungen mit gewissen constanten Factoren multiplicirt und addirt identisch Null geben.* Hiernach bilden die drei durch die Gleichungen (7.) dargestellten Punktenpaare eine Involution, und wir haben den Satz:

„*Wenn irgend sechs Punkte* 1, 2, . . . 6 *auf einer geraden Linie ge-*
„*geben sind, und man construirt drei Punktenpaare, von welchen das erste*
„*harmonisch ist zu den Punktenpaaren* 12 *und* 45, *das zweite harmonisch*
„*zu den Punktenpaaren* 23 *und* 56, *das dritte harmonisch zu den Punkten-*
„*paaren* 34 *und* 61, *so bilden die drei construirten Punktenpaare eine*
„*Involution*".

Da man die sechs auf der geraden Linie gegebenen Punkte 1, 2, . . . 6 auch beliebig mit einander vertauschen kann, so erhält man durch diese Vertauschungen nach dem ersten Satze 60 verschiedene Punktenpaare $\alpha\beta$ und nach dem letzten Satze 60mal drei Punktenpaare, welche eine Involution bilden.

Man wird bemerken, dass diese beiden Sätze dem *Pascal*schen und dem *Brianchon*schen Satze vom Sechsecke, welches einem Kegelschnitt einbeschrieben oder umbeschrieben ist, nachgebildet sind. Und in der That kann man auch ein Uebertragungsprincip angeben, nach welchem nicht nur die genannten beiden Sätze ohne Schwierigkeit aus dem *Pascal*schen und dem *Brianchon*schen hervorgehen, sondern noch andere Sätze über Punktenpaare auf

einer und derselben geraden Linie, welche ebenso den bekannten Erweiterungen des *Pascal*schen und des *Brianchon*schen Satzes entsprechen.

Wenn die sechs Punkte 1, 2 ... 6 durch eine Gleichung vom sechsten Grade gegeben sind, so kann man allerdings die Punkte, von welchen die angegebenen beiden Sätze handeln, nicht mehr durch algebraische Gleichungen rational ausdrücken; aber diese Sätze machen auf gewisse unsymmetrische Relationen der Wurzeln aufmerksam, die für die Algebra der Gleichung des sechsten Grades nicht ohne Bedeutung sind.

Heidelberg, im December 1863.

Bemerkung zu *Jacobi*s Beweis für die Anzahl der Doppeltangenten.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Der schöne Beweis, welchen *Jacobi* für die Anzahl der Doppeltangenten einer algebraischen Curve geliefert hat, wird, wie ich glaube, im Allgemeinen nicht in demjenigen Grade gewürdigt und gekannt, als er es verdient; und es liegt dies vielleicht an der Darstellung, welche in einzelnen Punkten nicht so symmetrisch ist, als man es heute bei durchgängiger Anwendung homogener Coordinaten zu verlangen pflegt, und welche namentlich an einer Stelle den einfachen Grundgedanken ein wenig verdeckt. Ich habe versucht, für meine Vorlesungen an der hiesigen Universität, diesen Beweis etwas zu modificiren, und ich glaube, dass dadurch der Grundgedanke desselben klar und einfach hervortritt.

Sei x der Berührungspunkt einer Doppeltangente der Curve n^{ter} Ordnung $u = 0$, und y ein Punkt, welcher gleichzeitig auf der Tangente von x:

$$(1.) \qquad u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0,$$

$\left(u_i = \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$, und auf einer beliebig gewählten Geraden

$$(2.) \qquad c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0$$

sich befindet. Stellt man dann u symbolisch durch

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n$$

dar, so ist die Bedingung dafür, dass x Berührungspunkt einer Doppeltangente werde, diese, dass die aus der Gleichung

$$(3.) \qquad (\mu(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + \lambda(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3))^n = 0,$$

nach Absonderung des Factors λ^2 gebildete Discriminante verschwinde.

Eliminirt man nun die y mit Hülfe von (1.), (2.), so erhält man aus (3.):

$$(4.)\qquad \left(\mu(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)+\lambda\begin{vmatrix} a_1 & u_1 & c_1 \\ a_2 & u_2 & c_2 \\ a_3 & u_3 & c_3 \end{vmatrix}\right)^n = 0.$$

Die fragliche Discriminante sei $F(x, c) = 0$; es ist zu beweisen, dass aus dieser Gleichung sich der Factor $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$ so oft muss absondern lassen, dass die c im Rest nicht mehr vorkommen. Dass der übrigbleibende Factor dann von der Ordnung $(n-2)(n^2-9)$ ist, zeigt eine Abzählung.

Setzen wir nun

$$\lambda = \varrho(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3),$$

wo die b wieder ganz beliebige Grössen sind; und bezeichnen wir der Kürze wegen Ausdrücke wie $b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$ durch b. Dann ist identisch

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & u_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & u_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & u_3 \\ a & b & c & u \end{vmatrix} = aA-bB+cC.$$

Die Gleichung (4.), welche man durch

$$(\mu a+\lambda B)^n = 0$$

ersetzen kann, geht so über in

$$(\mu a+\varrho bB)^n = 0,$$

oder mit Hülfe der soeben entwickelten Gleichung in

$$((\mu+\varrho A)a+\varrho cC)^n = 0.$$

Führt man also statt λ, μ die Grössen

$$\mu' = \mu+\varrho A = \mu+\frac{\lambda A}{b},$$

$$\lambda' = \varrho c = \frac{\lambda c}{b}$$

ein, so erhält man die Gleichung

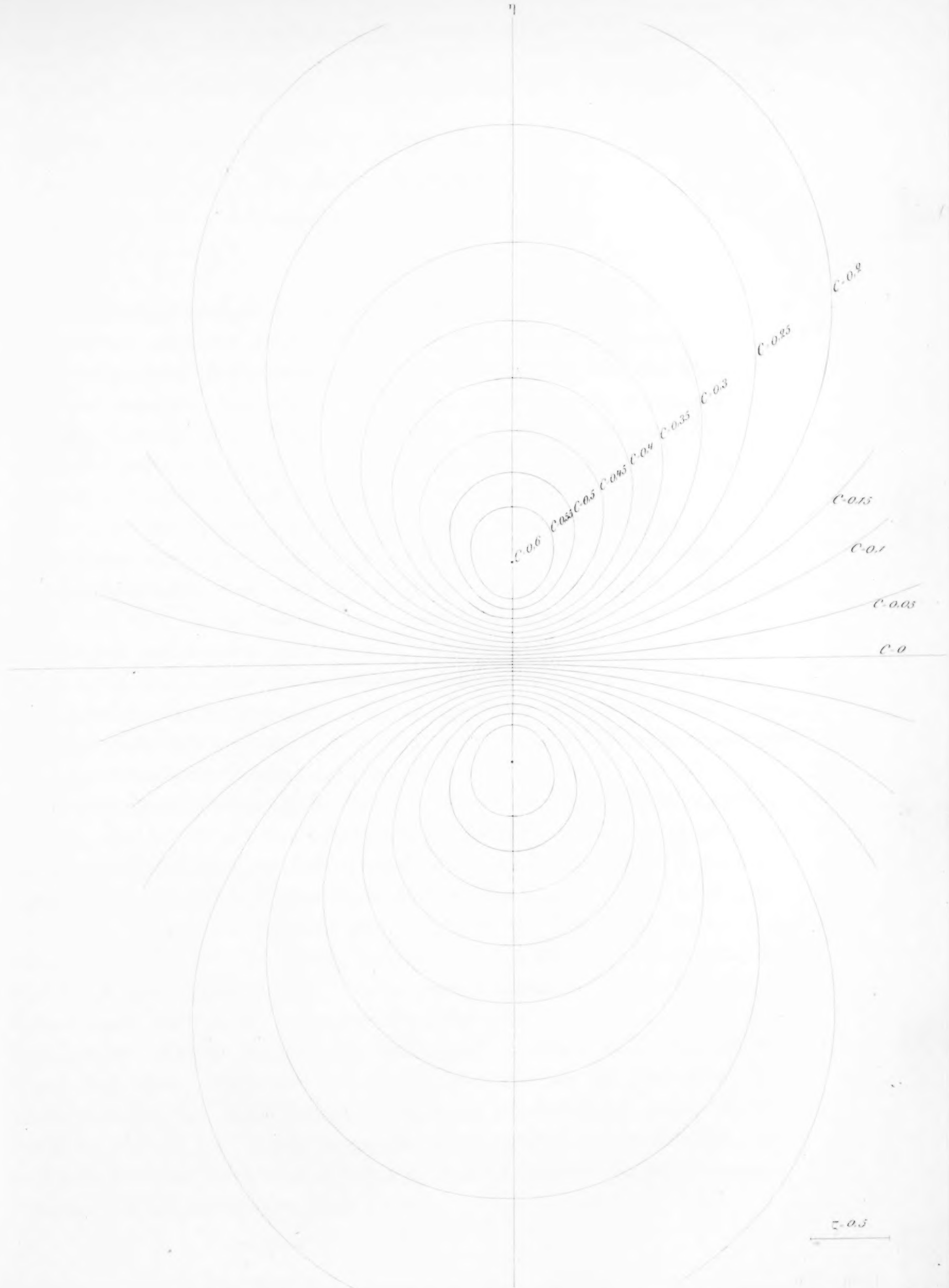
$$(\mu' a+\lambda' C)^n = 0,$$

welche sich von der ursprünglichen nur dadurch unterscheidet, dass die b an Stelle der c getreten sind. Diese Gleichung, durch λ'^2 dividirt, giebt also die Discriminante $F(x, b) = 0$. Und da beide Discriminanten sich nur durch eine Potenz der Transformationsdeterminante unterscheiden können, die hier $\frac{c}{b}$ ist, so hat man

$$F(x, c) = \left(\frac{c}{b}\right)^{\alpha} . F(x, b), \qquad \frac{F(x, c)}{c^{\alpha}} = \frac{F(x, b)}{b^{\alpha}},$$

diese Quotienten müssen also von den c frei werden, was zu beweisen war.

Giessen, den 23. Juli 1863.


η
C=0.9
C=0.85
C=0.8
C=0.75
C=0.7
C=0.65
C=0.6
C=0.55
C=0.5
C=0.45
C=0.4
C=0.35
C=0.3
C=0.15
C=0.1
C=0.05
C=0
ζ=0.5

Ueber die Anwendung der *Abel*schen Functionen in der Geometrie.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Die Anwendungen, welche die elliptischen Functionen in der Geometrie bisher gefunden haben, sind, obwohl auf ganz wenige unter den möglichen Fällen beschränkt, dennoch schon zahlreich genug, um den allgemeinen Charakter derselben hervortreten zu lassen. Alle diese Anwendungen gehen von der Theilung aus, und zeigen, wie die Lösungen von gewissen in der Geometrie auftretenden algebraischen Gleichungen mit Hülfe der Theilung der elliptischen Functionen einfach dargestellt werden können. Dies ist um so mehr werth, als jene Gleichungen selbst ihrer verwickelten Form wegen im Allgemeinen sehr schwer aufzustellen sind; nicht minder aber deswegen, weil die eigenthümlichen Beziehungen und Gruppirungen der Wurzeln unter einander dabei aufs klarste hervortreten. Dass *Steiner* in so vielen Fällen diesen Beziehungen nachzugehen gewusst hat, und das viele von ihm gelöste Probleme durch die Theorie der elliptischen Functionen erst ihre wahre analytische Ausdrucksweise finden, ist nicht die geringste der merkwürdigen Thatsachen, welche uns bei dem Studium der Schriften dieses grossen Geometers mit stets wachsender Bewunderung erfüllen.

Aehnliche Anwendungen der Theorie der *Abel*schen Functionen vorzuführen, ist der Zweck des gegenwärtigen Aufsatzes; und ich glaube, dass die darzulegenden wenigen Principien dazu dienen können, das Studium der algebraischen Curven in vieler Beziehung zu erleichtern. Dass solche Anwendungen bisher nicht versucht sind, obgleich wir seit sechs Jahren *Riemann*s Theorie dieser Functionen besitzen, ist ohne Zweifel grossentheils den Schwierigkeiten zuzuschreiben, welche dem Verständnisse der betreffenden Abhandlungen noch immer entgegenstehen, und welche auch durch die neueren Bemühungen jüngerer Mathematiker nicht ganz gehoben sind. Ein anderer Grund liegt darin, dass man bei diesen Anwendungen zu derjenigen Anschauungsweise der Natur dieser Functionen zurückkehren muss, welche *Jacobi* im 9ten und 13ten Bande dieses Journals aufgestellt hat, und welche sich bei Herrn *Riemann* durch eine andere ersetzt findet, obwohl für den Uebergang

zu der *Jacobi*schen Anschauungsweise das nöthige Material gegeben ist. Man kann sagen, dass bei *Jacobi* die gegenseitige Abhängigkeit zweier Reihen von gleich viel Variabeln in den Vordergrund tritt, während es sich bei Herrn *Riemann* vorzugsweise um eine Reihenentwicklung handelt. Ich werde im Folgenden immer von der Vorstellungsweise, wie *Jacobi* sie benutzt, Gebrauch machen. Die von der Theorie der *Abel*schen Functionen gemachten Ausführungen (von Herrn *C. Neumann* *) und Herrn *Prym* **)), scheinen sogar zu zeigen, dass dieser *Jacobi*sche Standpunkt den nothwendigen Dnrchgangspunkt bildet, und dass alle Entwicklungen zuerst in der von *Jacobi* vorausgesagten Form auftreten, selbst wenn man, wie Herr *Prym* thut, dieselbe zu vermeiden bestrebt ist.

Die geometrischen Anwendungen dieser Theorie, welche im Folgenden angebahnt werden, sind so zahlreich, dass ich nur einige Fälle näher auszuführen versucht habe. Diese Ausführungen beziehen sich namentlich auf die Theorie der ebenen Curven vierter Ordnung und enthalten unter anderen eine Lösung des Problems der Doppeltangenten, welche sich durch eine aus der Natur der Sache fliessende übersichtliche Gruppirung dieser merkwürdigen Geraden empfiehlt. Dabei ergeben sich fast von selbst eine Reihe von Sätzen, welche *Hesse* und *Steiner* im 49ten Bande dieses Journals angegeben haben, und auf welche *Hesse* seine elegante Deutung der zwischen den 28 Doppeltangenten eintretenden Beziehungen durch die Verbindungslinien von 8 Punkten im Raume gegründet hat. Es liegt in der Natur der hier angewandten Methoden, dass alle diese Sätze als ganz specielle Fälle von anderen, sehr allgemeinen, erscheinen, welche nicht bloss für ebene Curven beliebiger Ordnung, sondern auch für alle doppelt gekrümmten Curven in gleicher Weise ihr Geltung behalten.

§. 1.

Zusammenhang einer Curve n^{ter} Ordnung mit einer Classe von *Abel*schen Integralen.

Jede algebraische Gleichung $F(s, z) = 0$, vermöge deren s als Function von z bestimmt ist, begründet nach Herrn *Riemann* eine Classe von *Abel*schen Integralen. Aus den überall endlich bleibenden Integralen, welche man dabei erhält, setzen sich die Argumente von θ-Functionen auf lineare Weise zusammen. Nimmt man die p Argumente einer θ-Function als bekannt an,

---

*) Die Umkehrung der *Abel*schen Integrale, Halle 1863.

**) Theoria nova ff. ultraellipticarum, Diss. Berlin 1863.

so entsprechen denselben p Werthe von z, welche die oberen Grenzen der constituirenden Integrale bilden; und dieselben, oder irgend welche algebraische Functionen derselben, bestimmen sich als Wurzeln einer Gleichung p^{ten} Grades, deren Coefficienten sich aus θ-Functionen rational zusammensetzen. Die Zahl p wird mit Hülfe der Formel

$$p = \frac{w}{2} - (n-1) \text{ *)}$$

gefunden; dabei ist n der Grad, bis zu welchem s in der gegebenen Gleichung ansteigt, w aber die Zahl der Werthsysteme, für welche $F'(s) = 0$, ohne dass $F'(z) = 0$. Dabei wird vorausgesetzt, dass für diejenigen Werthsysteme, wo $F'(s) = 0$ und $F'(z) = 0$, nicht $F''(ss) . F''(zz) - F''(sz)^2 = 0$ sei.

Herr *Riemann* legt die Gleichung $F(s, z) = 0$ zu Grunde in der Form, dass, wenn man die Gleichung nach Potenzen von s ordnet, jeder Coefficient von gleich hoher Ordnung für z sei. Für die geometrische Anwendung ist es zweckmässig, eine andere Form als allgemeine Grundform zu betrachten, nämlich diejenige, welche durch Substitution von $-\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3}{b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3}$ für z, $-\frac{\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3}{\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3}$ für s in eine homogene Function n^{ter} Ordnung der drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3 übergeführt werden kann, wo die a, b, α, β beliebige Constante bezeichnen.

Sei die so entstehende Gleichung

$$(1.) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung. Die Reduction dieser Gleichung auf die Form

$$(2.) \qquad F(s, z) = 0$$

mit Hülfe der Gleichungen

$$(3.) \qquad \begin{cases} (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + z(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0, \\ (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3) + s(\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3) = 0 \end{cases}$$

entspricht dann der Darstellung der Curve als Durchschnitt entsprechender Strahlen der Büschel (3.), in denen s, z die veränderlichen Parameter bilden. Untersuchen wir, wie gross die Zahl w hienach wird.

Wenn $F's = 0$, ohne dass $F'z = 0$, so hat die Gleichung z zwei gleiche Wurzeln; zwei aufeinanderfolgenden Strahlen des ersten Büschels entspricht

*) Band 54 dieses Journals p. 129.

einer des zweiten. Mit anderen Worten, ein Strahl des zweiten Büschels wird Tangente der Curve. Der Fall $F''s = 0$, $F'''s = 0$ etc. ist leicht zu berücksichtigen; die Tangente berührt dann in höherer Ordnung. Aber dies kann nur für besondere Werthe der a, b, α, β eintreten.

Wenn $F'(s) = 0$ und $F'(z) = 0$, so ist auch

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0;$$

die Curve hat dann einen Doppelpunkt. Dass die Bedingung

$$F''(ss).F''(zz) - F''(sz)^2 = 0$$

ausgeschlossen ist, bedeutet, dass kein Doppelpunkt ein Rückkehrspunkt werden solle *).

Ist also die Zahl der Doppelpunkte gleich d, so hat man nach einer bekannten Formel für die Zahl der Tangenten,

$$w = n.(n-1) - 2d.$$

Daher

$$(4.) \quad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d.$$

Dieses ist also die Zahl, welche die Classe der zu einer Curve n^{ter} Ordnung gehörigen *Abel*schen Functionen angiebt.

So entsprechen die elliptischen Functionen ($p = 1$) den allgemeinen Curven dritter Ordnung, den Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten etc.; die erste Classe der *Abel*schen Transcendenten den Curven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt, oder denen fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten etc.; die folgende Classe ($p = 3$) den allgemeinen Curven vierter Ordnung etc.

Nach der Theorie der *Abel*schen Functionen findet man z mit Hülfe einer Gleichung p^{ten} Grades durch θ-Functionen ausgedrückt. Die erste Gleichung (3.) lehrt also, wenn die p Argumente der θ als bekannt vorausgesetzt werden, eine lineare Relation zwischen den Coordinaten eines Punktes kennen; das zu z gehörige s, dessen Ausdruck man aus dem von z und aus seinen nach den Argumenten der θ-Functionen genommenen Differentialquotienten ableitet, liefert eine zweite, und man kann endlich die Coordinaten einer Curve so durch θ-Functionen ausdrücken, wobei, neben der allgemeinen Theorie der

*) Diese Beschränkung lässt sich, wie es scheint, aufheben, indem man festsetzt, dass für jeden Rückkehrpunkt zugleich die Zahl der Tangenten um eine vermehrt werden solle.

betreffenden *Abel*schen Functionen, nur die Auflösung einer einzigen Gleichung p^{ten} Grades gefordert wird.

Die überall endlichen Integrale, aus denen die Argumente der θ-Functionen sich zusammensetzen, kann man nach *Riemann* (a. a. O. pag. 131.) und mit Hülfe der Gleichungen

$$\frac{x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{\frac{\partial f}{\partial x_3}}$$

in die Form bringen:

$$\int \Theta \cdot \frac{\Sigma \pm c_1 x_2\,dx_3}{c_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial x_3}},$$

wobei Θ eine ganze homogene Function der Ordnung $n-3$ ist, welche für die Doppelpunkte der Curve verschwindet, und wo zwischen den x die Gleichung $f=0$ bestehend angesehen wird. Die c, welche der Symmetrie wegen eingeführt sind (vergl. *Aronhold*, Monatsber. der Berl. Acad., Sitzung vom 25. April 1861), haben auf das Integral gar keinen Einfluss, indem die Grösse unter dem Integralzeichen in Wahrheit von denselben unabhängig ist. Die zweckmässige Wahl der unteren Grenzen so wie der in den Θ auftretenden Coefficienten hat Herr *Riemann* gelehrt; ich werde beides so voraussetzen, wie es in der zweiten Abtheilung der angeführten Abhandlung gegeben ist.

§. 2.

Anwendung des *Abel*schen Satzes auf den Durchschnitt zweier Curven.

Der *Abel*sche Satz (Band 4 pag. 200 dieses Journals) kann nun, mit Zugrundelegung homogener Gleichungen statt der von *Abel* benutzten, in einer Weise ausgesprochen werden, welche wichtige Folgerungen gestattet. Ich werde den Beweis hinzufügen, wie derselbe sich bei der angegebenen Modification gestaltet.

Es sei $f=0$ die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung, $\varphi=0$ die einer anderen Curve m^{ter} Ordnung. Es sei ferner Θ eine beliebige rationale homogene Function $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung. Betrachten wir die Summe

$$\Sigma \int \Theta \cdot \frac{\Sigma \pm c_1 x_2\,dx_3}{c_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial x_3}},$$

ausgedehnt über alle diejenigen Punkte als obere Grenzen der Integrale, welche das Schnittsystem von $f=0$, $\varphi=0$ bilden.

Unter dem Integralzeichen genügen die x keineswegs der Gleichung $\varphi=0$, sofern dieselbe eine bestimmte Curve repräsentirt; aber wir können die Gleichung $\varphi=0$ bestehend annehmen, indem wir ihre Coefficienten als Variable einführen, welchen erst in den Grenzen die betreffenden gegebenen Werthe beizulegen sind.

Multiplicirt man nun unter dem Integralzeichen Zähler und Nenner mit $\Sigma\pm k_1\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$, wo die k beliebige Grössen sind, so findet man im Zähler die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \Sigma k_i c_i, & \Sigma k_i x_i, & \Sigma k_i dx_i \\ \Sigma c_i\frac{\partial f}{\partial x_i}, & \Sigma x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}, & \Sigma\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i \\ \Sigma c_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, & \Sigma x_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, & \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i \end{vmatrix}.$$

Von den Elementen dieser Determinante verschwinden drei; das letzte wird gleich $-\delta\varphi$, wenn $\delta\varphi$ dasjenige bedeutet, was aus φ durch Differentiation der Coefficienten entsteht; und man hat endlich als Werth der Determinante:

$$\Sigma c_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\Sigma k_i x_i.\delta\varphi,$$

so dass die gesuchte Summe übergeht in

$$\Sigma\int\Theta\cdot\frac{\Sigma k_i x_i}{\Sigma\pm k_1\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}}\cdot\delta\varphi.$$

Hier sind jetzt die Incremente der einzelnen Coefficienten von φ in rationale Functionen der Coordinaten der verschiedenen Punkte multiplicirt, welche den Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$ zusammen genügen. Sämmtliche Punkte kommen in diesen Functionen symmetrisch vor; man kann dieselben daher als rationale Functionen der Coefficienten von f und φ darstellen; und indem man nach letzteren integrirt, erhält man, neben rationalen Functionen der Coefficienten nur logarithmische und Kreisfunctionen von solchen. Dies ist der *Abel*sche Satz.

Bemerken wir nun insbesondere, dass, wenn Θ zugleich eine *ganze* Function ist, die Summe der unter dem Integralzeichen stehenden Functionen immer verschwindet. Indem man nämlich das von *Jacobi* (Band 14 dieses

Journals p. 286) ausgesprochene Theorem auf homogene Gleichungen anwendet, und zugleich bemerkt, dass, wenn $f=0$, $\varphi=0$, auch:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}-\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{x_1}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}}{x_2}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}-\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{x_3},$$

so erhält man die Formel:

$$\Sigma\frac{\Omega(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)}{\Sigma\pm k_1\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}}=0,$$

wo Ω eine ganze homogene Function der Ordnung $m+n-3$ ist, und wo die Summe sich auf alle Werthsysteme bezieht, welche den Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$ gleichzeitig genügen. Da nun $\Theta.\delta\varphi$ von der Form Ω ist, sobald Θ, welches von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung war, eine *ganze* Function bedeutet, so wird die obige Integralsumme dann constant, d. h. von den Coefficienten von φ unabhängig

Man hat also folgenden Satz:

Bedeutet $f=0$ die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung, und wird das Integral

$$\int\Theta\cdot\frac{\Sigma\pm c_1x_2dx_3}{c_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+c_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+c_3\frac{\partial f}{\partial x_3}},$$

in welchem Θ eine homogene Function $(n-3)^{ter}$ Ordnung ist, so gebildet, dass man die x durch die Gleichung $f=0$ von einander abhängig macht, so ist die Summe aller Werthe des Integrals für die Schnittpunkte von $f=0$ mit einer anderen Curve $\varphi=0$ (m^{ter} Ordnung) als Aggregat von rationalen und von Logarithmen rationaler Functionen der Coefficienten von φ darstellbar; insbesondere aber ist diese Summe von den Coefficienten von φ unabhängig, sobald Θ zugleich eine ganze Function ist.

Da Θ, wenn es eine ganze Function ist, noch $\frac{n-1.n-2}{2}$ willkürliche Coefficienten enthält, so erhält man hieraus ebensoviel einzelne Gleichungen, welche Summen von mn Integralen Constanten gleich geben. Diese $\frac{n-1.n-2}{2}$ Gleichungen enthalten in keiner Weise die Coefficienten von φ; sie sind daher überhaupt die Bedingungen dafür, dass mn Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen. Ist $m\gtreqless n$, so ist bekanntlich die An-

zahl der hierzu erforderlichen Bedingungen genau gleich $\frac{n-1.n-2}{2}$ *); ist aber m kleiner als n, so ist die Anzahl der erforderlichen Bedingungen:

$$mn-\frac{m.m+3}{2},$$

und da

$$\left(mn-\frac{m.m+3}{2}\right)-\frac{n-1.n-2}{2} = -\frac{n-m-1.n-m-2}{2},$$

so ist auch noch für $m=n-1$, $m=n-2$ die Anzahl der erhaltenen Gleichungen der Anzahl der erforderlichen Bedingungen gleich. Ist $m<n-2$, so wird die Zahl der Bedingungsgleichungen grösser; dieselben können aber nicht aufhören mit einander verträglich zu sein, und die hinreichende Anzahl von Bestimmungen zu ersetzen.

Wenn die betrachtete Curve keinen Doppelpunkt besitzt, also im Allgemeinen, bestehen die durch das Theorem gegebenen Gleichungen nur zwischen überall endlich bleibenden Integralen, wie sie bei der Bildung der Argumente der Θ-Functionen gebraucht werden. Dieser allgemeine Fall soll zunächst behandelt werden. Existiren Doppelpunkte, so sind in ebensoviel Gleichungen die Integrale nicht mehr unter diese Categorie gehörig.

§. 3.

Bestimmung der Constanten des *Abel*schen Satzes, und Umkehrung des Satzes über die Schnittpunkte algebraischer Curven.

Setzen wir im Folgenden voraus, die Curve besitze keinen Doppelpunkt. Aus diesem Fall können alle anderen als specielle abgeleitet werden. Wir haben $p=\frac{n-1.n-2}{2}$; die überall endlich bleibenden Integrale bezeichnen wir durch

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_p,$$

und unterscheiden das verschiedenen Punkten angehörige durch obere Indices. Die u sollen so bestimmt sein, wie sie Herr *Riemann* zur Bildung der Argumente der θ-Functionen verwendet; dadurch sind einerseits die unteren Grenzen bestimmt, andererseits ist festgesetzt, welche Veränderungen die u durch Aenderung des Integrationsweges erfahren, dass sie nämlich bei gleichbleibender oberer Grenze dadurch nur übergeführt werden können in

*) *Jacobi,* dieses Journal Band 15. pag. 285.

das System:

$$u_1+A_1, \quad u_2+A_2, \quad \ldots \quad u_p+A_p,$$

wo, wie immer im Folgenden, die A ein System der Form

$$(5.) \quad \begin{cases} A_1 = m_1 i\pi + a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1p}q_p, \\ A_2 = m_2 i\pi + a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2p}q_p, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_p = m_p i\pi + a_{p1}q_1 + a_{p2}q_2 + \cdots + a_{pp}q_p \end{cases}$$

bezeichnen. In diesen Ausdrücken sind die a durch die Curvengleichung gegeben, die m, q aber bedeuten ganze Zahlen.

Die Gleichungen des Theorems gehen dann in folgende Form über:

$$(6.) \quad \begin{cases} u_1' + u_1^{(2)} + \cdots + u_1^{(mn)} \equiv \gamma_1, \\ u_2' + u_2^{(2)} + \cdots + u_2^{(mn)} \equiv \gamma_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_p' + u_p^{(2)} + \cdots + u_p^{(mn)} \equiv \gamma_p. \end{cases}$$

Da die Curve m^{ter} Ordnung aus m Geraden bestehen kann, so muss man jede dieser Gleichungen dadurch bilden können, dass man die m entsprechenden Gleichungen addirt, welche für $m=1$ bestehen. Man hat daher, wenn $c_1, c_2, \ldots c_p$ die zu $m=1$ gehörigen Constanten γ bedeuten, sogleich

$$\gamma_1 = mc_1, \quad \gamma_2 = mc_2, \quad \ldots \quad \gamma_p = mc_p.$$

Die Constanten c sind dann nicht blos von den Coefficienten sondern auch von dem Grade der Curve $\varphi=0$ unabhängig. Ich werde jetzt zeigen, dass die c sämmtlich gleich Null gesetzt werden können.

Hiezu führt die Betrachtung des Falles $m=n-3$. Herr *Riemann* nämlich hat a. a. O. p. 148 bewiesen, dass ein System der obigen Art congruent mit lauter Nullen ist, sobald es ausgedehnt wird über die gemeinschaftlichen Lösungen von $f=0$ mit denjenigen Gleichungen, deren linker Theil aus den Zählern der in den u integrirten Functionen linear zusammengesetzt ist, etwaige Doppelpunkte ausgeschlossen, welche hier von vorn herein nicht vorkommen. Nun ist eine lineare Function der Zähler der integrirten Ausdrücke eine allgemeine homogene Function $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung (Θ); für $m=n-3$ ist also $(n-3)c_h=0$, also immer $c_h=0$. Man hat daher folgenden Satz:

Bildet man die überall endlichen Integrale mit den von Herrn Riemann angegebenen unteren Grenzen, und bildet die Summen solcher In-

tegrale für die Durchschnittspunkte der Curve $f=0$ mit einer anderen, so ist das System der erhaltenen Integralsummen jederzeit einem System von Nullen congruent.

Dieser Satz gestattet die Umkehrung und lautet dann so:

Sobald die Summen der über $m.n$ Punkte ausgedehnten überall endlichen Integrale Null sind, liegen die $m.n$ Punkte im Durchschnitt einer Curve m^{ter} Ordnung mit der Curve n^{ter} Ordnung.

Die Differentialgleichungen nämlich:

$$\begin{aligned} du_1' + du_1^{(2)} + \cdots + du_1^{(mn)} &= 0, \\ du_2^{(1)} + du_2^{(2)} + \cdots + du_2^{(mn)} &= 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot &\\ du_p^{(1)} + du_p^{(2)} + \cdots + du_p^{(mn)} &= 0 \end{aligned}$$

werden durch p algebraische Gleichungen, welche der *Abel*sche Satz giebt, vollständig integrirt. Die p Integrale enthalten p willkürliche Constanten. Da die Differentialgleichungen ferner durch solche algebraische Gleichungen integrirt werden, welche aussagen, dass die mn Punkte auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen, so müssen diese letzteren aus jenen durch eine specielle Wahl der willkürlichen Constanten ableitbar sein, und wenn man solche Werthe der Constanten festhält, so müssen die algebraischen Integrale eben jene Gestalt haben, in welcher sie die mn Punkte als den Durchschnittspunkt einer Curve m^{ter} Ordnung mit der gegebenen charakterisiren. Die erforderliche Constantenbestimmung ist aber oben geleistet worden.

§. 4.

Berührungscurven, welche durch eine Anzahl auf der Curve gegebener Punkte bestimmt sind.

Mit Hülfe der entwickelten Sätze ergiebt sich leicht die Lösung folgender Aufgabe:

Es sei $m \gtreqless n-2$; auf der Curve n^{ter} Ordnung sind $mn-pr$ Punkte beliebig gegeben; man soll durch sie eine Curve m^{ter} Ordnung legen, welche die Curve n^{ter} Ordnung in p Punkten r-punktig berührt.

Diese Aufgabe ist lösbar, wenn $m \gtreqless n-2$. Sie ist auch bestimmt, wenn $m=n-2$ oder $m=n-1$. Denn in beiden Fällen ist die Anzahl der gestellten Bedingungen, nämlich $mn-pr+p(r-1)$ gleich der Zahl der in der Curvengleichung enthaltenen Constanten. Ist $m \gtreqless n$, so ist die Zahl der Bedingungsgleichungen $(mn-p)$ nach einem bereits erwähnten Satze eben aus-

reichend, um das Punktsystem zu bestimmen, welches die Curve m^{ter} Ordnung mit der Curve n^{ter} Ordnung gemein haben muss; aber es erfüllt sodann die gestellten Bedingungen jede Curve m^{ter} Ordnung, welche durch die gefundenen Punkte hindurchgeht.

Setzen wir der Kürze wegen $mn-pr=\lambda$. Von den Schnittpunkten beider Curven sind dann λ gegeben, von den übrigen pr sollen je r zusammenfallen. Die Summen entsprechender Integrale, welche den gesuchten Berührungspunkten zugehören, seien $v_1, v_2, \ldots v_p$; die Gleichungen (6.) nehmen dann die Gestalt an:

$$\begin{aligned} rv_1 &\equiv -(u_1'+u_1^{(2)}+\cdots+u_1^{(\lambda)}),\\ rv_2 &\equiv -(u_2'+u_2^{(2)}+\cdots+u_2^{(\lambda)}),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ rv_p &\equiv -(u_p'+u_p^{(2)}+\cdots+u_p^{(\lambda)}). \end{aligned}$$

Die rechten Theile dieser Congruenzen sind gegeben; durch Division mit r findet man, indem man der Allgemeinheit wegen rechts ein willkürliches System der A, durch r dividirt, hinzufügt:

$$(7.)\qquad \begin{cases} v_1 \equiv -\dfrac{u_1'+u_1^{(2)}+\cdots+u_1^{(\lambda)}}{r}+\dfrac{A_1}{r},\\ v_2 \equiv -\dfrac{u_2'+u_2^{(2)}+\cdots+u_2^{(\lambda)}}{r}+\dfrac{A_2}{r},\\ \cdots\cdots\cdots\\ v_p \equiv -\dfrac{u_p'+u_p^{(2)}+\cdots+u_p^{(\lambda)}}{r}+\dfrac{A_p}{r}. \end{cases}$$

Bildet man jetzt die θ, deren Argumente eben diese v sind, und die zugehörige Gleichung p^{ten} Grades, so findet man durch Auflösung die p Punkte, welche in den v als obere Grenzen vorkommen, d. h. die p Berührungspunkte, wodurch die Aufgabe gelöst ist.

Die A enthalten die $2p$ Zahlen m, q, denen noch alle Werthe von 0 bis $r-1$ beigelegt werden können. *Die Anzahl aller Lösungen des Problems ist daher* r^{2p}.

Die r^{2p} Systeme von je p Berührungspunkten haben eine sehr merkwürdige Lage gegen einander. Unterscheidet man r solcher Systeme, von denen auch mehrere gruppenweise zusammenfallen können, durch beigesetzte obere Indices, und addirt die entsprechenden Gleichungen (7.), so erhält man

für $k = 1, 2, \ldots p$:

$$(8.) \qquad v_k^{(1)} + v_k^{(2)} + \cdots + v_k^{(r)} + u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + \cdots + u_k^{(\lambda)} \equiv \frac{A_k^{(1)} + A_k^{(2)} + \cdots + A_k^{(r)}}{r}.$$

Bestimmt man also die in den A vorkommenden Zahlen m, q so, dass

$$(9.) \qquad \begin{cases} m_k^{(1)} + m_k^{(2)} + \cdots + m_k^{(r)} \equiv 0 \pmod{r}, \\ q_k^{(1)} + q_k^{(2)} + \cdots + q_k^{(r)} \equiv 0 \pmod{r}, \end{cases}$$

so kann man statt der rechten Seite von (8.) Null setzen, und es findet sich also, dass die r Systeme von Berührungspunkten mit den gegebenen Punkten in einer Curve m^{ter} Ordnung liegen. Aus (9.) sieht man, dass von den r Systemen $r-1$ beliebig gewählt werden können, wodurch dann das r^{te} sich bestimmt; und man hat also den Satz:

Legt man eine Curve m^{ter} Ordnung durch die gegebenen Punkte und durch $r-1$ Systeme von Berührungspunkten, so geht dieselbe noch durch ein r^{tes} System. Von ersteren können mehrere gruppenweise zusammenfallen; es kann aber auch geschehen, dass letzteres mit einem der ersteren zusammenfällt; was insbesondere bei $r = 2$ immer eintritt.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass, wenn μ Systeme zusammenfallen, in den Punkten des Systems die neue Curve mit der gegebenen eine μ-punktige Berührung hat.

§. 5.

Systeme von Berührungscurven, welche durch feste Punkte der Curve gehen.

Lassen wir in dem vorigen Problem von den gegebenen Punkten, deren Anzahl grösser als $\mu . r$ vorausgesetzt werden mag, μ mal r Punkte zusammenfallen. Nehmen wir sodann nur die übrigen $mn-(p+\mu)r$ Punkte als gegeben an. Wir haben es dann mit der unbestimmten Aufgabe zu thun:

Eine Curve m^{ter} Ordnung soll durch $mn-(p+\mu)r$ auf einer Curve n^{ter} Ordnung gegebene Punkte gehen, und diese Curve ausserdem in $p+\mu$ Punkten r-punktig berühren.

Diese Aufgabe ist, wenn $m \gtreqless n-2$, wie die vorige lösbar, und zwar sind μ Berührungspunkte noch willkürlich, die p übrigen aber dann bestimmt. Durch die gegebenen $mn-(p+\mu)r$ Punkte lassen sich also noch unendlich viele Curven der gesuchten Art legen; wenn μ Berührungspunkte willkürlich gewählt sind, noch immer r^{2p}.

Herr *Hesse* hat den Begriff eines *Systems* von Berührungscurven eingeführt (Band 49 dieses Journals) und für die Theorie der Curven dritter und vierter Ordnung davon mannigfachen Gebrauch gemacht. Geht man nämlich von einer bestimmten Berührungscurve aus, und lässt dieselbe sich stetig verändern, so durchlaufen die Berührungspunkte allmälig alle nur möglichen Combinationen. Aber es ist keineswegs möglich, durch solche stetige Veränderung zu *allen* Berührungscurven zu gelangen; sondern man muss zu diesem Zwecke diejenigen Berührungscurven, welche eine möglichst grosse Anzahl von beliebig gewählten Berührungspunkten gemeinsam haben, gleichzeitig variiren lassen. Aus jeder dieser Curven entsteht dann ein System von Berührungscurven, deren keines mit einem anderen eine Curve gemein hat.

Man bemerkt nun, dass die verschiedenen Systeme von Berührungscurven bei der vorliegenden Darstellung durch ein sehr einfaches Kennzeichen charakterisirt sind. Jedem System entspricht nämlich ein bestimmtes System der A; denn diese Systeme sind völlig discret, und es kann daher niemals geschehen, dass man von einer Curve, welche einem System der A entspricht, zu Curven welche einem anderen System entsprechen, einen stetigen Uebergang durch lauter Berührungscurven hindurch herstelle. Man darf daher folgenden Satz aussprechen:

Man kann unendlich viele Curven m^{ter} Ordnung, wenn $m \geqq n-2$, bestimmen, welche eine Curve n^{ter} Ordnung in $\frac{n-1.n-2}{2}+\mu$ Punkten r-punktig berühren, während der Rest der Schnittpunkte gegeben ist. Diese Curven theilen sich in r^{2p} verschiedene Systeme ein, dergestalt dass es nicht möglich ist, von einer Curve eines Systems durch lauter Berührungscurven hindurch zu einer Curve eines anderen Systems stetig überzugehen.

Bezeichnen wir nun die den $p+\mu$ Berührungspunkten entsprechenden Integrale durch

$$w_k^{(1)}, \quad w_k^{(2)}, \quad \ldots \quad w_k^{(p+\mu)},$$

die Summen der den festen Punkten entsprechenden Integrale durch U_k, so haben wir:

$$w_k^{(1)} + w_k^{(2)} + \cdots + w_k^{(p+\mu)} \equiv \frac{-U_k + A_k}{r}.$$

Betrachten wir jetzt r Curven desselben Systems, und addiren die entsprechenden Gleichungen, was links durch das Zeichen $\S$ angedeutet werden mag,

so kommt:

$$S(w_k^{(1)}+w_k^{(2)}+\cdots+w_k^{(p+\mu)}) \equiv -U_k,$$

d. h.

Die Berührungspunkte von irgend r Berührungscurven desselben Systems liegen jederzeit auf einer Curve m^{ter} Ordnung, welche durch die gegebenen festen Punkte hindurchgeht.

Ausserdem hat man, wie im vorigen §., den Satz:

Legt man eine Curve m^{ter} Ordnung durch die gegebenen Punkte und durch $r-1$ Systeme von je $p+\mu$ Berührungspunkten, welche gleichen oder verschiedenen Systemen von Berührungscurven angehören, so geht dieselbe immer noch durch ein r^{tes} System.

Der vorige Satz kann als specieller Fall dieses letzteren aufgefasst werden, und für $r=2$, bei überall zweipunktiger Berührung, geht dieser geradezu in jenen über.

§. 6.

Systeme von Curven, welche die gegebene Curve in einer gewissen Ordnung berühren, wo sie derselben begegnen.

Wenn mn durch r theilbar ist, so treten insbesondere Berührungscurven auf, wie diejenigen, welche Herr *Hesse* a. a. O. untersucht hat, welche die Curve n^{ter} Ordnung überall r-punktig berühren, wo sie derselben begegnen. Es ist dann $mn=(p+\mu)r$; die entstehenden Systeme sind allein von der Curve n^{ter} Ordnung selbst abhängig, nicht mehr, wie im vorigen, ausserdem durch besondere auf ihr beliebig gewählte Punkte charakterisirt. Die übrigen im vorigen §. angeführten Sätze fahren hier fort zu gelten; aber die Anzahl der Systeme kann unter Umständen eine andere werden als die oben angegebene.

Nehmen wir nämlich an, es habe m mit r einen gemeinschaftlichen Factor, so dass

$$m=m's, \qquad r=r's,$$

wo m', r' relative Primzahlen seien. So oft nun alle in den A vorkommende Zahlen m, q den Factor s enthalten, hat man

$$\frac{A_k}{r}=\frac{A_k'}{r'},$$

wo die A' Ausdrücke nach Art der A sind. Dann ist immer, wenn für die Berührungspunkte die betreffenden Integrale durch $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$, $\ldots$ $u_k^{\left(\frac{mn}{r}\right)}=u_k^{\left(\frac{m'n}{r'}\right)}$

bezeichnet werden:

$$u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + \cdots + u_k^{\left(\frac{m'n}{r'}\right)} \equiv \frac{A'_k}{r'},$$

d. h. das System von Berührungscurven besteht in Wahrheit aus Curven der Ordnung m', welche die gegebene Curve überall r'-punktig berühren, und welche, $s$mal gezählt, als Systeme m^{ter} Ordnung mit r-punktiger Berührung angesehen werden können. Indem man von diesen abstrahirt, und bemerkt, dass diese Ausnahmsysteme der A an der Zahl r'^{2p} sind, gelangt man zu dem Satz:

Wenn $mn = (p+\mu)r$, $m \gtrless n-2$, *so giebt es Systeme von Curven* m^{ter} *Ordnung, welche die Curve* n^{ter} *Ordnung in* $p+\mu$ *Punkten* r*-punktig berühren, von denen* μ *beliebig sind. Ist* $m = m's$, $r = r's$, *wo* m', r' *relative Primzahlen, so ist die Anzahl der Systeme* $r^{2p} - r'^{2p}$; *nur wenn* m *und* r *relative Primzahlen sind, ist die Anzahl derselben gleich* r^{2p}.

Hieran knüpft sich eine Anzahl weiterer Sätze über diejenigen Fälle, in denen die Berührungspunkte mehrerer Berührungscurven zusammen den vollständigen Durchschnitt der Curve n^{ter} Ordnung mit einer anderen Curve bilden. Solche Sätze existiren auch noch, wenn man nicht Berührungscurven gleicher Ordnung betrachtet. Es ist nämlich, wenn m', r'; m'', r''; ... $m^{(s)}$, $r^{(s)}$ die den verschiedenen zusammen betrachteten Berührungscurven entsprechenden Zahlen bezeichnen, und wenn die zugehörigen Systeme der A in ähnlicher Weise bezeichnet werden, nur nöthig, dass

$$\frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''} + \cdots + \frac{m^{(\mu)}}{r^{(\mu)}} = h$$

eine ganze Zahl ist, und dass die Gleichungen stattfinden:

$$\frac{A'_k}{r'} + \frac{A''_k}{r''} + \cdots + \frac{A_k^{(\mu)}}{r^{(\mu)}} \equiv 0,$$

damit die Berührungspunkte der Curven von den Ordnungen m', m'', ... $m^{(\mu)}$ auf einer Curve der h^{ten} Ordnung liegen.

Ich begnüge mich diese Quelle von Sätzen hier angegeben zu haben.

§. 7.

Berührung einer Curve vierter Ordnung durch Curven dritter Ordnung, vierpunktig in drei Punkten; und Berührung einer Curve sechster Ordnung durch Curven fünfter Ordnung, dreipunktig in 10 Punkten.

Die im Vorigen behandelten Probleme sind wesentlich unbestimmt. Es giebt aber Classen von völlig bestimmten Berührungscurven. Für $m \gtrless n$ treten

dieselben immer ein, wenn $mn = pr$, oder $\frac{m}{r} = \frac{p}{n}$. Hat nun n nicht die Form $4h+2$, so haben p und n keinen gemeinschaftlichen Factor; man hat daher als allgemeinste Annahme $m = p.s$, $r = n.s$. Nur wenn n die Form $4h+2$ hat, haben p und s den gemeinsamen Factor 2. In diesem Falle muss man daher setzen $m = \frac{p}{2}\cdot s$, $r = \frac{n}{2}\cdot s$. Und verbindet man dies mit den Bestimmungen des vorigen §., so ergiebt sich folgender Satz:

Ist s eine beliebige Zahl, und n nicht von der Form $4h+2$, so giebt es immer $n^{2p}(s^{2p}-1)$ Curven der Ordnung $p.s$, welche die Curve n^{ter} Ordnung in p Punkten $n.s$-punktig berühren. Ist dagegen n von der Form $4h+2$, so giebt es $(\frac{1}{2}n)^{2p}.(s^{2p}-1)$ Curven der Ordnung $\frac{1}{2}p.s$, welche die Curve n^{ter} Ordnung in p Punkten $\frac{1}{2}n.s$-punktig berühren.

Dieser Satz muss scheinbar zwei Ausnahmen erfahren, bei $s = 1$ und $n = 4$ oder $n = 6$, weil in diesen Fällen $m < n$ wird. Aber in beiden Fällen ist der Satz dennoch richtig, wovon man sich in folgender Weise überzeugt. Die Anzahl von Bedingungen, welchen eine in $\frac{mn}{r}$ Punkten r-punktig berührende Curve unterworfen ist, findet man gleich $\frac{mn}{r}(r-1)$. Damit hiedurch die Curve m^{ter} Ordnung $(m < n)$ vollständig bestimmt sei, muss man die Gleichung haben:

$$\frac{mn(r-1)}{r} = \frac{m.m+3}{2},$$

oder

$$m = \frac{2n(r-1)}{r} - 3.$$

Erstlich also muss r ein Factor von $2n$ sein, setzt man ferner $m < n$, so findet man $r < 2 + \frac{6}{n-3}$. Diesen Bedingungen genügt im Allgemeinen nur $r = 2$; ausserdem aber $r = 4$ für $n = 4$, und $r = 3$ für $n = 6$. Man erhält daher folgende Berührungsaufgaben, welche als vollständig bestimmt von besonderem Interesse sind:

Die Curve n^{ter} Ordnung soll von einer Curve der $(n-3)^{ten}$ Ordnung in $\frac{n.n-3}{2}$ Punkten zweipunktig berührt werden;

wovon die Aufgabe der Doppeltangenten bei den Curven vierter Ordnung ein besonderer Fall ist;

eine gegebene Curve vierter Ordnung soll von einer Curve dritter Ordnung in drei Punkten vierpunktig berührt werden;

eine gegebene Curve sechster Ordnung soll von einer Curve fünfter Ordnung in zehn Punkten dreipunktig berührt werden.

Die beiden letzten Aufgaben sind in dem oben angegebenen Satze bereits enthalten; dennoch mögen die allgemeinen Resultate für diese beiden Fälle hier noch näher specialisirt werden.

Für das zweite Problem erhält man folgende Bestimmung:

Es giebt 4096 Curven dritter Ordnung, welche eine gegebene Curve vierter Ordnung in drei Punkten vierpunktig berühren.

Die 4096 Curven entsprechen den 4096 verschiedenen Systemen der A, welche man für $p = 3$ bilden kann, wenn die Zahlen m, q die Werthe 0, 1, 2, 3 erhalten dürfen. Die Berührungspunkte jeder Curve sind durch eine Gleichung dritten Grades bestimmt; die Coefficienten der Gleichung sind θ-Functionen mit den Argumenten:

$$(10.)\qquad \begin{cases} v_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + u_1^{(3)} \equiv \dfrac{A_1}{4}, \\ v_2 = u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + u_2^{(3)} \equiv \dfrac{A_2}{4}, \\ v_3 = u_3^{(1)} + u_3^{(2)} + u_3^{(3)} \equiv \dfrac{A_3}{4}. \end{cases}$$

Bezeichnet man die verschiedenen Berührungscurven entsprechenden Zahlen m, q durch obere Indices, *so hat man immer die Berührungspunkte dreier Curven auf einer neuen Curve dritter Ordnung,* sobald

$$m_i' + m_i'' + m_i''' + m_i'''' \equiv 0 \pmod 4,$$
$$q_i' + q_i'' + q_i''' + q_i'''' \equiv 0 \pmod 4.$$

Die so erhaltenen Curven dritter Ordnung theilen sich in drei Classen; die Curven der ersten berühren zweipunktig in den Berührungspunkten zweier der obigen Curven; die der zweiten berühren in den Berührungspunkten einer Curve zweipunktig, und gehen durch die Berührungspunkte zweier anderen hindurch; die der dritten Classe endlich gehen durch die Berührungspunkte von vier verschiedenen Curven. Die Anzahl aller dieser Curven ist sehr gross, und man erhält sie leicht durch eine einfache Abzählung, was ich hier übergehen zu können glaube. Weiteres über die Gruppirung dieser Berührungscurven siehe unten.

Soll eine Curve sechster Ordnung von einer Curve fünfter Ordnung in zehn Punkten dreipunktig berührt werden, so hat man $p = 10$, $m = 5$, $n = 6$, $r = 3$; jedes System von zehn Berührungspunkten wird mittelst einer Gleichung

zehnten Grades gefunden, deren Coefficienten θ-Functionen sind mit den Argumenten:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \cdots + u_1^{(10)} \equiv \frac{A_1}{3}, \\ v_2 &= u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \cdots + u_2^{(10)} \equiv \frac{A_2}{3}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{10} &= u_{10}^{(1)} + u_{10}^{(2)} + \cdots + u_{10}^{(10)} \equiv \frac{A_{10}}{3}. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Berührungscurven ist 3^{20}. Indem man die Gleichungen dieser Art, welche zu drei verschiedenen Berührungscurven gehören, addirt, und dann

$$\frac{A_k + A_k' + A_k''}{3} \equiv 0$$

setzt, findet man den Satz:

Jede zwei Systeme von Berührungspunkten liegen auf einer Curve fünfter Ordnung, welche die Curve sechster Ordnung noch in den Berührungspunkten einer dritten Berührungscurve schneidet. Solcher Curven fünfter Ordnung giebt es also $\frac{3^{20}.3^{20}-1}{6}$.

§. 8.

Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche eine gegebene Curve n^{ter} Ordnung in $\frac{n.n-3}{2}$ Punkten zweipunktig berühren.

Die Aufgabe, *eine Curve* $(n-3)^{ter}$ *Ordnung so legen, dass sie eine gegebene Curve* n^{ter} *Ordnung in* $\frac{n.n-3}{2}$ *Punkten zweipunktig berührt*, ist bei weitem wichtiger als die vorigen, und von hervorragendem Interesse. Indem wir bei der bisher benutzten Bezeichnung bleiben, stellen sich die Gleichungen zwischen den Integralen, auf welche diese Aufgabe führt, folgendermassen dar:

$$(11.)\quad \begin{cases} u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \cdots + u_1^{\left(\frac{n.n-3}{2}\right)} \equiv \frac{A_1}{2}, \\ u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \cdots + u_2^{\left(\frac{n.n-3}{2}\right)} \equiv \frac{A_2}{2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{\left(\frac{n-1.n-2}{2}\right)}^{(1)} + u_{\left(\frac{n-1.n-2}{2}\right)}^{(2)} + \cdots + u_{\left(\frac{n-1.n-2}{2}\right)}^{\left(\frac{n.n-3}{2}\right)} \equiv \frac{A_{\left(\frac{n-1.n-2}{2}\right)}}{2}. \end{cases}$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist um eins grösser als die der Unbekannten. Dennoch sind die Gleichungen unter einander verträglich, wie jetzt gezeigt werden soll; es ist aber keine eine Folge der anderen, vielmehr können sie nur für gewisse Systeme der A neben einander bestehen.

Herr *Riemann* hat a. a. O. p. 147 den Satz bewiesen, dass man ein gegebenes System von p Grössen immer und nur dann, und im Allgemeinen nur auf eine Weise, den Summen von je $p-1$ entsprechenden Integralen gleich setzen könne, wenn θ für die gegebenen Grössen als Argumente verschwindet. In unserem Falle ist $p = \frac{n-1.n-2}{2}$, $p-1 = \frac{n.n-3}{2}$; es giebt also stets eine Berührungscurve der gesuchten Art, sobald θ, mit den Argumenten $\frac{A_1}{2}$, $\frac{A_2}{2}$, ... $\frac{A_p}{2}$ gebildet, gleich Null wird. Man muss also haben:

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\sum_{h,k=1}^{h,k=p} a_{hk} n_h (n_k + q_k) + i\pi \sum_{k=1}^{k=p} n_k m_k}$$

$$= e^{-\frac{i\pi}{2} \Sigma m_k q_k - \frac{1}{4} \Sigma\Sigma a_{hk} q_h q_k} \cdot \Sigma e^{\Sigma\Sigma \frac{2n_h + q_h}{2} \cdot \frac{2n_k + q_k}{2} a_{hk} + i\pi \Sigma \frac{2n_k + q_k}{2} m_k}.$$

Die in der letzten Form auftretende Summe geht, wenn man $-(n_k+q_k)$, $-(n_h+q_h)$ für n_k, n_h setzt, auch über in

$$\Sigma e^{\Sigma\Sigma \frac{2n_h + q_h}{2} \cdot \frac{2n_k + q_k}{2} a_{hk} - i\pi \Sigma \frac{2n_k + q_k}{2} m_k},$$

und wenn man diese Summe zu der vorigen, mit welcher sie identisch ist, addirt, findet sich:

$$0 = \left\{ \Sigma e^{\Sigma\Sigma \frac{2n_h + q_h}{2} \cdot \frac{2n_k + q_k}{2} a_{hk}} \cdot (-1)^{\Sigma n_k m_k} \right\} \cos\left(\frac{\Sigma q_k m_k}{2} \pi \right).$$

Die betrachtete θ-Function verschwindet also immer, wenn

$$(12.) \qquad q_1 m_1 + q_2 m_2 + \cdots + q_p m_p = 2h+1,$$

und dieses ist die Bedingung für das Zusammenbestehen der Gleichungen (11.).

Untersuchen wir nun die Anzahl der Combinationen, durch welche die Gleichungen (12.) erfüllt werden kann. Seien k der Grössen q gleich 0, die übrigen $(p-k)$ gleich 1; die den ersten Grössen q entsprechenden m können dann 0 oder 1 sein, was 2^k Combinationen giebt; die Summe der anderen m aber muss ungerade sein, oder es ist immer das letzte durch die übrigen $p-k-1$

bestimmt. Die letzteren m können daher noch auf 2^{p-k-1} Weisen gewählt werden, oder die m im Ganzen auf 2^{p-1} Arten. Da die q auf $\frac{p.p-1...p-k+1}{1.2...k}$ Arten den angegebenen Bedingungen genügen können, so giebt es

$$\frac{p.p-1...p-k+1}{1.2...k} \cdot 2^{p-1}$$

Systeme der A, bei denen k der Grössen q gleich 0 sind. Setzen wir nun $k = 0, 1, 2, \ldots p-1$, so finden sich im Ganzen

$$2^{p-1}\left(1+\frac{p}{1}+\frac{p.p-1}{1.2}+\cdots+p\right) = 2^{p-1}(2^p-1)$$

Systeme der A, oder der Satz:

Es giebt $2^{\frac{n.n-3}{2}}\left(2^{\frac{n-1.n-2}{2}}-1\right)$ *Curven* $(n-3)^{ter}$ *Ordnung, welche eine gegebene Curve* n^{ter} *Ordnung in* $\frac{n.n-3}{2}$ *Punkten zweipunktig berühren.*

Für $n=4$ giebt dies die 28 Doppeltangenten.

Die Berührungspunkte jeder Curve können mittelst einer Gleichung $(p-1)^{ten}$ Grades gefunden werden. Man braucht nämlich nur auf beiden Seiten der Gleichungen (11.) die einem beliebig gegebenen Punkte entsprechenden u zu addiren, und man hat dann die Argumente von θ-Functionen vor sich. Aus diesen setzen sich die Coefficienten einer Gleichung p^{ten} Grades zusammen, von der eine Wurzel (dem beliebig gewählten Punkte entsprechend) bekannt ist.

Die Berührungspunkte von μ Curven dieser Art liegen jedesmal auf einer Curve der Ordnung $\frac{\mu(n-3)}{2}$, sobald das System besteht:

$$\frac{A_k^{(1)}+A_k^{(2)}+\cdots+A_k^{(\mu)}}{2} \equiv 0,$$

bei welchem die oberen Indices sich auf die verschiedenen betrachteten Curven beziehen. Man überblickt das Feld von Sätzen und Abzählungen, welche sich hieraus ergeben, und welche die natürliche Verallgemeinerung derjenigen Resultate bilden, auf welche man in der Theorie der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung geführt ist. Ich bemerke nur noch einen Satz, welcher ebenfalls in speciellster Fassung bei den Curven vierter Ordnung bereits bekannt ist. Betrachtet man nämlich die Curven $2h-(n-3)^{ter}$ Ordnung, welche eine Curve n^{ter} Ordnung in $hn-\frac{n.n-3}{2}$ Punkten zweipunktig berühren, und addirt zu den entsprechenden Gleichungen

$$u_k^{(1)}+u_k^{(2)}+\cdots+u_k^{\left(hn-\frac{n.n-3}{2}\right)} \equiv \frac{A_k}{2}$$

die Gleichungen (11.) unter Voraussetzung desselben Systems der A, so findet sich, dass die ersten $hn-\frac{n.n-3}{2}$ Berührungspunkte mit den $\frac{n.n-3}{2}$ Berührungspunkten der Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung in einer Curve h^{ter} Ordnung liegen. Nun ist die Anzahl der Systeme von Berührungscurven $2h-(n-3)^{ter}$ Ordnung gleich 2^{2p}, und nur, wenn n ungerade ist, muss man das System ausschliessen, für welches das System der A verschwindet. Man hat also folgenden Satz:

Unter den $2^{2p}\left(p=\frac{n-1.n-2}{2}\right)$ *Systemen von Berührungscurven, welche bei geradem* n *von ungerader Ordnung* m, *oder bei ungeradem* n *von gerader Ordnung* m *sind, und welche die gegebene Curve* n^{ter} *Ordnung überall, wo sie derselben begegnen, zweipunktig berühren, giebt es immer* $2^{p-1}(2^p-1)$ *solche, dass die Berührungspunkte jeder Curve des Systems mit denen einer bestimmten der obigen Berührungscurven* $(n-3)^{ter}$ *Ordnung in einer Curve* $\frac{m+n-3}{2}^{ter}$ *Ordnung liegen; und es giebt bei geradem* n $2^{p-1}(2^p+1)$, *bei ungeradem* $2^{p-1}(2^p+1)-1$ *solcher Systeme, bei denen die Berührungspunkte niemals auf einer Curve* $\frac{m+n-3}{2}^{ter}$ *Ordnung liegen.*

§. 9.

Die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung.

Die entwickelten allgemeinen Resultate sollen jetzt für die Curven vierter Ordnung genauer ausgeführt werden.

Die Anzahl der Doppeltangenten ist nach §. 8 gleich 28, wie bekannt. Man kann aber nach dem Vorigen sie schematisch darstellen, wie folgt. Jede Doppeltangente mag bezeichnet werden durch die in Klammern geschlossene Reihe der ihr entsprechenden Zahlen m, q, also durch:

$$(m_1, m_2, m_3; q_1, q_2, q_3).$$

Die Zahlen können 0 oder 1 sein, doch so, dass immer

$$m_1q_1+m_2q_2+m_3q_3 \equiv 1 \pmod 2.$$

Nehmen wir also für die m alle möglichen aus den Zahlen 0 und 1 bestehenden Systeme. 0, 0, 0 ausgeschlossen, und bestimmen obiger Gleichung gemäss die zugehörigen Systeme der q, so erhalten wir die 28 Doppeltangenten in folgendem Schema:

(100, 100)	(010, 010)	(001, 001)	(011, 010)	(101, 100)	(110, 100)	(111, 100)
(100, 110)	(010, 110)	(001, 011)	(011, 001)	(101, 110)	(110, 101)	(111, 010)
(100, 101)	(010, 011)	(001, 101)	(011, 110)	(101, 001)	(110, 010)	(111, 001)
(100, 111)	(010, 111)	(001, 111)	(011, 101)	(101, 011)	(110, 011)	(111, 111).

Es giebt nach §. 5 63 Systeme von Kegelschnitten (*Hesse*, dieses Journal Band 49.), welche die Curve in 4 Punkten berühren, entsprechend den 63 möglichen Combinationen

$$(m_1, m_2, m_3; q_1, q_2, q_3),$$

die Combination (000, 000) allein ausgeschlossen.

Ein solcher Berührungskegelschnitt zerfällt immer in zwei Doppeltangenten

$$(m_1', m_2', m_3';\ q_1', q_2', q_3'), \quad (m_1'', m_2'', m_3'';\ q_1'', q_2'', q_3''),$$

sobald

$$(13.) \qquad m_i' + m_i'' \equiv m_i, \quad q_i' + q_i'' \equiv q_i \pmod 2,$$

wobei ausserdem sein muss:

$$(14.) \qquad \begin{cases} m_1' q_1' + m_2' q_2' + m_3' q_3' \equiv 1, \\ m_1'' q_1'' + m_2'' q_2'' + m_3'' q_3'' \equiv 1. \end{cases}$$

Es sind dabei entweder die q oder die m nicht sämmtlich Null; nehmen wir an, dies trete bei den q ein; sonst wären in der folgenden Bestimmung nur die q mit den m zu vertauschen. Dann zeigen erstlich die Gleichungen (13.), dass man für gegebene q_i die q_i', q_i'' auf sechs verschiedene Arten wählen kann. Ueberhaupt nämlich existiren acht Combinationen der q', q'', welche jene Gleichungen erfüllen; von diesen aber sind die beiden auszuschliessen, für welche sämmtliche q' oder sämmtliche q'' Null sind (was nicht zusammen eintreten kann). Diese sechs Arten geben drei Paare von Systemen q', q'', indem immer zwei Arten sich nur durch Vertauschung der q' mit den q'' von einander unterscheiden.

In jedem Paar von Systemen ist wenigstens ein Paar entsprechender q ungleich, also 0 und 1, demnach irgend ein anderes 1 und 0 oder 1 und 1. Es existiren daher ein q' und ein q'' mit verschiedenem unteren Index, welche gleich 1 sind. Bestimmt man nun die dem dritten Index entsprechenden m so, dass sie der betreffenden Gleichung (13.) genügen (was auf zwei Arten geschehen kann), so bestimmen die übrigen m sich aus (14.) und (13.) successive. Jedem der drei Paare q entsprechen also zwei Paare m; oder man hat den Satz:

In jedem System von Berührungskegelschnitten kommen sechs Paare von Doppeltangenten vor. (*Hesse*, l. c., *Salmon*, higher plane curves.)

Da für irgend zwei solcher demselben System angehöriger Paare die Summe aller m_i so wie die Summe aller q_i stets gerade ist, so hat man ferner den Satz:

Die Berührungspunkte je zweier Paare, welche demselben System angehören, liegen auf einem Kegelschnitt. (ib., ib.)

Die Zahl der so erhaltenen Kegelschnitte ist bekanntlich gleich der der 63 Systeme, multiplicirt mit der Anzahl 15 der Combinationen von 6 Paaren zu zweien, und dividirt durch 3, da jede vier Tangenten, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen, auf drei Arten in zwei Paare zerlegt werden können, also jeder Kegelschnitt dreimal vorkommt. So ist die Zahl dieser Kegelschnitte 315. Das obige Schema erlaubt sofort, die solchen Kegelschnitten entsprechenden Doppeltangenten zusammenzustellen.

Der allgemeinere Satz, *dass die Berührungspunkte je zweier Kegelschnitte desselben Systems auf einem Kegelschnitt liegen* (*Hesse*, l. c.), folgt aus §. 6.

Es giebt ferner nach §. 6 *64 Systeme von Curven dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung in 6 Punkten berühren.* Die den Berührungspunkten entsprechenden Integrale genügen dann immer den Gleichungen:

$$(15.) \qquad u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + \cdots + u_k^{(6)} \equiv \frac{A_k}{2}.$$

Man übersieht nun, dass diese 64 Systeme sich sofort in zwei Classen sondern, je nachdem das System der A zugleich bei den Doppeltangenten vorkommt oder nicht; je nachdem also $\Sigma mq \equiv 1$ (was 28 mal geschieht) oder $\Sigma mq \equiv 0$ (was auf 36 Arten geschehen kann). Hat man nämlich für irgend eine Doppeltangente

$$(16.) \qquad u_k^{(7)} + u_k^{(8)} \equiv \frac{A_k}{2},$$

so folgt

$$u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + \cdots + u_k^{(8)} \equiv 0,$$

d. h. die Berührungspunkte der Curve dritter Ordnung liegen mit denen der Doppeltangente auf einem Kegelschnitt; während, wenn es für ein System der A keine Gleichung wie (16.) giebt, auch die Berührungspunkte der Curve auf keinem Kegelschnitt liegen können, da die Gleichung (15.) dann eine passende Ergänzung nicht zulässt. Man hat also den Satz (*Hesse*, l. c.):

Von den 64 Systemen der Curven dritter Ordnung haben 28 die Eigenschaft, dass die 6 Berührungspunkte einer Curve auf einem Kegelschnitt liegen, und jeder Kegelschnitt geht dann noch immer durch die Berührungspunkte einer Doppeltangente, welche für dasselbe System constant bleibt. Die Berührungspunkte bei Curven der übrigen 36 Systeme liegen nicht in einem Kegelschnitt.

Dagegen haben nach §. 6 beide Classen die gemeinsame Eigenschaft, *dass die Berührungspunkte je zweier Curven desselben Systems auf einer Curve dritter Ordnung liegen.* (*Hesse*, l. c.)

Zu diesen Systemen gehören auch die 4096 Curven dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung in drei Punkten vierpunktig berühren (§. 7). In der That folgt aus (10.)

$$2(u_k^{(1)}+u_k^{(2)}+u_k^{(3)}) \equiv \frac{A_k}{2};$$

jede Curve gehört also zu demjenigen System von Berührungscurven, dem das System der A_k zukommt. Umgekehrt aber folgt aus dieser Gleichung

$$u_k^{(1)}+u_k^{(2)}+u_k^{(3)} \equiv \frac{A_k}{4}+\frac{A_k'}{2},$$

wo in A_k, A_k' die Zahlen m, q jetzt überall nur die Werthe 0 und 1 erhalten dürfen. Ist über die A_k verfügt, so können die A_k' noch auf 64 Arten gewählt werden; *daher gehören in jedes der 64 Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung 64 solche Curven, welche die Curve vierter Ordnung in drei Punkten vierpunktig berühren.* Dies stimmt damit überein, dass nach §. 4 durch jede zwei Punkte einer Curve vierter Ordnung 64 Kegelschnitte gelegt werden können, welche dieselbe in drei Punkten berühren. Legt man diese Kegelschnitte durch die Berührungspunkte einer Doppeltangente, so sind die Berührungspunkte des Kegelschnitts zugleich diejenigen, in welchen eine Curve dritter Ordnung vierpunktig berühren kann. *So erhält man die 28.64 Berührungscurven, welche den erwähnten 28 Systemen angehören; aber man sieht, dass es noch 36.64 solcher Berührungscurven giebt, in deren Berührungspunkten nicht zugleich ein Kegelschnitt die Curve vierter Ordnung berühren kann.*

Ueberhaupt giebt es nach §. 5 je 63 Systeme von Curven $(2m)^{ter}$ Ordnung und je 64 Systeme von Curven $(2m+1)^{ter}$ Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung zweipunktig berühren, wo sie derselben begegnen. Und diese letzteren 64 Systeme theilen sich immer in 28 und 36 so, dass die Berührungspunkte einer Curve aus einem der 28 Systeme immer mit den Berührungspunkten einer der 28 Doppeltangenten auf einer Curve $(m+1)^{ter}$ Ordnung liegen, während etwas Aehnliches bei den anderen 36 Systemen niemals stattfindet. Aber alle Systeme haben die Eigenschaft, dass die Berührungspunkte je zweier Curven desselben Systems auf einer Curve desselben Grades liegen.

Man kann von diesen Sätzen leicht zu einer genaueren Discussion derjenigen Fälle übergehen, in denen die Berührungspunkte von 6, 8 etc. Doppel-

tangenten auf einer Curve dritter, vierter etc. Ordnung liegen, worüber von *Hesse* und *Steiner* (Bd. 49 dieses Journals) Sätze gefunden sind. Ich übergehe diese Ausführungen, welche nach den entwickelten Principien durch blosse Abzählungen erhalten werden können.

Von Curven, welche die Curve vierter Ordnung mehrpunktig berühren, will ich wenigstens noch die der dritten Ordnung anführen. Aus §. 6 folgt der Satz:

Es giebt 728 Systeme von Curven dritter Ordnung, welche eine Curve vierter Ordnung in vier Punkten dreipunktig berühren.

Zwischen den Integralen bestehen hier die Gleichungen:

$$u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + u_k^{(3)} + u_k^{(4)} \equiv \frac{A_k}{3};$$

das System der A darf niemals verschwinden. Betrachtet man eine Curve, einem anderen System angehörig, für welches immer $2A_k$ an die Stelle von A_k tritt, und addirt die einer solchen Curve entsprechenden Gleichungen zu den vorigen, so findet sich die Summe analoger Integrale immer der Null congruent. Man hat daher folgenden Satz, welcher (unter anderen) das Verhalten dieser Systeme charakterisirt:

Diese 728 Systeme theilen sich in 364 Paare zu zweien so, dass die Berührungspunkte jeder Curve des einen Systems mit denen jeder Curve des anderen Systems auf einem Kegelschnitt liegen.

Aehnliche Sätze kann man für die Berührungscurven dieser und anderer Ordnungen in Menge aufstellen.

§. 10.

Ueber einige Sätze von *Steiner*, die Curven vierter Ordnung betreffend.

Ich benutze diese Gelegenheit, um einige Sätze über Curven vierter Ordnung zu beweisen, welche *Steiner* (dieses Journal Bd. 49, p. 266 folgg.) angegeben hat, obwohl dieselben nicht in die Reihe der hier angestellten Betrachtungen gehören.

Nach *Hesse* (dieses Journal Band 49, p. 261) kommt die Aufstellung eines Berührungskegelschnitts darauf hinaus, der Gleichung der Curve die Form

$$uw - v^2 = 0$$

zu geben, wo u, v, w Ausdrücke der zweiten Ordnung sind. Alle Kegelschnitte, welche demselben der 63 Systeme angehören, sind dann in der Form enthalten

$$u + 2\lambda v + \lambda^2 w = 0,$$

und man findet die 6 in dem System vorkommenden Tangentenpaare durch eine Gleichung sechsten Grades in λ, indem man die Determinante dieses Kegelschnitts verschwinden lässt. Für den Schnittpunkt x der Tangenten eines Paars müssen dann die Differentialquotienten

$$u_i + 2\lambda v_i + \lambda^2 w_i$$

verschwinden, und man findet nach einem bekannten Verfahren die Producte und Quadrate der Coordinaten x den Unterdeterminanten des Kegelschnittes $u + 2\lambda v + \lambda^2 w = 0$ proportional. Diese Ausdrücke haben, wie man sofort sieht, die Form:

$$\varrho x_i x_k = p_{ik} + \lambda q_{ik} + \lambda^2 r_{ik} + \lambda^3 s_{ik} + \lambda^4 t_{ik},$$

wo ϱ einen willkürlichen Factor bedeutet, und wo die p, q, ... nur noch von den Coefficienten der Curve abhängen. Bildet man daher die Determinante dieser sechs Gleichungen, indem man ϱ und λ eliminirt, so hat man eine Gleichung zweiten Grades für die x, welche von der gewählten Wurzel λ ganz unabhängig ist. Und so hat man den von *Steiner* a. a. O. gegebenen Satz:

Die Doppelpunkte der 6 demselben System angehörigen Paare von Doppeltangenten liegen auf einem Kegelschnitt.

Da identisch

$$(uw - v^2)(k-\lambda)^2 = (u + 2kv + k^2 w)(u + 2\lambda v + \lambda^2 w) - (u + (k+\lambda)v + k\lambda w)^2,$$

so ist

$$u + (k+\lambda)v + k\lambda w = 0,$$

oder was dasselbe ist, jeder Kegelschnitt von der Form

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

ist ein solcher, welcher durch die Berührungspunkte zweier Kegelschnitte des Systems hindurchgeht. Lässt man denselben in ein Linienpaar p, q zerfallen, d. h. setzt man:

$$\alpha u_{ik} + \beta v_{ik} + \gamma w_{ik} = p_i q_k + q_i p_k,$$

so genügen die Coordinaten einer Geraden des Paars der Gleichung, welche durch Elimination von α, β, γ, q_1, q_2, q_3 entsteht:

$$K = \begin{vmatrix} u_{11} & v_{11} & w_{11} & 2p_1 & 0 & 0 \\ u_{22} & v_{22} & w_{22} & 0 & 2p_2 & 0 \\ u_{33} & v_{33} & w_{33} & 0 & 0 & 2p_3 \\ u_{23} & v_{23} & w_{23} & 0 & p_3 & p_2 \\ u_{31} & v_{31} & w_{31} & p_3 & 0 & p_1 \\ u_{12} & v_{12} & w_{12} & p_2 & p_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Doppelpunkte der Paare müssen zugleich den Gleichungen genügen:

$$\alpha u_i + \beta v_i + \gamma w_i = 0,$$

oder, indem man α, β, γ eliminirt, der Gleichung

$$G = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Man hat also den Satz:

Wenn man die vollständigen Vierecke construirt, deren Ecken die Berührungspunkte von Kegelschnitten desselben Systems sind, so bilden die Durchschnitte gegenüberliegender Seiten die Curve dritter Ordnung $G = 0$, *und die Seiten selbst umhüllen die Curve dritter Classe* $K = 0$.

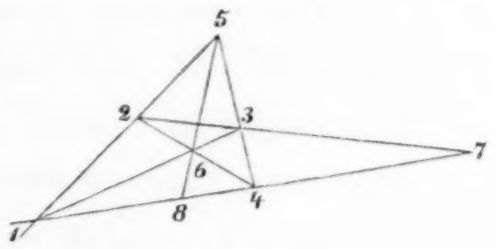
Insbesondere folgen daraus die von *Steiner* a. a. O. gegebenen Sätze als specielle Fälle:

Auf der Curve $G = 0$ *liegen die Doppelpunkte der 6 dem System angehörigen Paare von Doppeltangenten, so wie die Schnittpunkte der Geraden, welche die Berührungspunkte jedes Paars kreuzweise verbinden.*

Und:

Die Curve $K = 0$ *wird berührt von den sechs Paaren dem System angehöriger Doppeltangenten, so wie von den Geraden, welche die Berührungspunkte der Paare kreuzweise verbinden.*

Lässt man in einem vollständigen Viereck 1, 2, 3, 4, dessen Ecken Berührungspunkte eines Kegelschnitts sein sollen, zwei, etwa 2 und 3 zusammenfallen, so fallen auch 5, 6 (siehe die Fig.) in denselben Punkt. Es gehören aber die Punkte 5, 6 der Curve $G = 0$ an; diese schneidet also in dem betreffenden Punkte die gegebene Curve vierter Ordnung, indem erstere die Gerade 5, 6, letztere die Gerade 2, 3 zur Tangente hat. Die Schnittpunkte von $G = 0$ mit der gegebenen Curve haben also die Eigenschaft, dass in ihnen ein Kegelschnitt die Curve vierpunktig berühren kann, der sie ausserdem noch (in 1 und 4) zweimal zweipunktig berührt. In jedem System giebt es demnach 12 Kegelschnitte dieser Art.



Da ferner die Punkte 1, 8, 4, 7 ein harmonisches System bilden, so bilden auch in den betrachteten Punkten die Tangente an die gegebene Curve, die Tangente an $G = 0$, und die von der vierpunktigen Berührungsstelle nach

den zweipunktigen gezogenen Geraden ein harmonisches System. — Der Punkt 7 gehört der Curve $G=0$ an; er wird hier der Durchschnitt der Tangente an der vierpunktigen Berührungsstelle mit der Sehne, welche die zweipunktigen Berührungsstellen verbindet.

Die Tangente 2, 3 an einer der vierpunktigen Berührungsstellen ist Tangente an $K=0$; ebenso die Geraden 2, 1; 3, 4, welche jene Stelle mit denen der zweipunktigen Berührung verbinden; da nun auch 3, 1; 2, 4 Tangenten dieser Curve sind, und diese mit den ebengenannten Geraden unendlich nahe zusammenfallen, so müssen 1, 4, die Stellen der zweipunktigen Berührung, als Schnittpunkte nächster Tangenten auf $K=0$ liegen. Diese Curve ist von der sechsten Ordnung; die 24 in einem System vorkommenden Punkte 1, 4 stellen also das vollständige Schnittsystem der Curve $K=0$ mit der gegebenen Curve vor. So sind die folgenden von *Steiner* gegebenen Sätze bewiesen:

Es giebt $63.12=756$ *Kegelschnitte, welche eine gegebene Curve vierter Ordnung in einem Punkte a vierpunktig, und ausserdem noch in zwei anderen, b, c, zweipunktig berühren.*

Die Punkte a sind in jedem System die 12 *Durchschnitte von* $G=0$ *mit der gegebenen Curve; auf* $G=0$ *liegen auch b, c und der Schnittpunkt der Tangente der gegebenen Curve im Punkte a mit der Sehne b, c.*

In jedem Punkte a bilden die nach b, c gezogenen Geraden mit den Tangenten der gegebenen Curve und der Curve $G=0$ *ein harmonisches System.*

Die Tangente in a, sowie die drei Geraden ab, ac, bc berühren die Curve $K=0$, *und zwar ab, ac in b und c selbst, so dass die Punkte b, c in jedem System den vollständigen Durchschnitt von* $K=0$ *mit der gegebenen Curve darstellen.*

Steiner entwickelt endlich Zusammenhänge zwischen den Curven $G=0$, $K=0$. Die Beziehung, in welcher diese Curven zu einander stehen, kann man folgendermassen erkennen.

Betrachten wir statt der Functionen u, v, w irgend welche lineare Verbindungen derselben

$$U_1 = a_1 u + b_1 v + c_1 w,$$
$$U_2 = a_2 u + b_2 v + c_2 w,$$
$$U_3 = a_3 u + b_3 v + c_3 w.$$

Diese drei neuen Functionen können immer so bestimmt werden, dass sie die partiellen Differentialquotienten einer Function dritter Ordnung nach x_1, x_2, x_3 sind. Hierzu ist nöthig, dass folgende identische Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} a_2u_3+b_2v_3+c_2w_3 &= a_3u_2+b_3v_2+c_3w_2, \\ a_3u_1+b_3v_1+c_3w_1 &= a_1u_3+b_1v_3+c_1w_3, \\ a_1u_2+b_1v_2+c_1w_2 &= a_2u_1+b_2v_1+c_2w_1. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind für die x linear; setzt man also die Coefficienten auf beiden Seiten einander gleich, so findet man 9 lineare Gleichungen, welche in Bezug auf die gesuchten Grössen a, b, c homogen sind. Dennoch sind sie erfüllbar; denn man bemerkt sofort, dass ihre Determinante eine überschlagene ist, und demnach, weil von ungeradem Grade, identisch verschwindet.

Nun ändern sich offenbar die Ausdrücke G und K keineswegs, wenn man bei der Bildung derselben statt u, v, w irgend welche lineare Verbindungen derselben zu Grunde legt, z. B. die eben gefundenen partiellen Differentialquotienten einer homogenen Function f dritter Ordnung. Dann aber hat man, bis auf einen Zahlenfactor:

$$G=\Delta_f, \qquad K=S_f,$$

wo Δ_f die Covariante dritter Ordnung, S_f die erste zugehörige Form dritter Classe von f bedeutet. Aus der bekannten Rolle, welche die Curven $\Delta_f=0$, $S_f=0$ in der Theorie der Curven dritter Ordnung spielen, folgen daher unmittelbar die von *Steiner* angegebenen Beziehungen. Die Curven $\Delta_f=0$, $S_f=0$ sind dieselben, welche Herr *Cremona* in seiner „Introduzione ad una teoria geometrica della curve piane" als *Hesse*sche und *Cayley*sche Curve bezeichnet hat. Von diesen gelten folgende Sätze:

Die zu den Wendepunkten der Hesseschen Curve gehörigen harmonischen Polaren sind die Rückkehrtangenten der Cayleyschen Curve. (*Hesse*, dieses Journal Bd. 38, p. 252.)

Die zu den Rückkehrtangenten der Cayleyschen Curve gehörigen harmonischen Punkte sind die Wendepunkte der Hesseschen Curve. (ib.)

Die Wendetangenten von $u=0$ berühren die Hessesche und die Cayleysche Curve in denselben 9 Punkten. (*Cremona*, l. c. p. 116.)

Jede Tangente der Cayleyschen Curve schneidet die Hessesche Curve in zwei Punkten, deren Tangenten sich auf der Hesseschen Curve treffen, und in einem dritten Punkt, der mit dem Berührungspunkt auf der Cayleyschen Curve und mit den anderen beiden Schnittpunkten ein harmonisches System bildet. (ib.)

Von jedem Punkte der Hesseschen Curve gehen an die Cayleysche drei Tangenten; die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier ist Tangente der Cayleyschen Curve; die dritte bildet mit der im Ausgangspunkt an die Hessesche Curve gezogenen Tangente und mit den ersten beiden Tangenten ein harmonisches System. (ib.)

Die blosse Anwendung dieser Sätze giebt die folgenden, von *Steiner* gegebenen Resultate:

Aus jedem Wendepunkte w der Curve $G=0$ gehen drei Tangenten Q, Q_1, Q_2 an die Curve, welche in q, q_1, q_2 berühren. Die letzteren drei Punkte liegen auf einer Rückkehrtangente R der Curve $K=0$. Diese schneidet $K=0$ ausser q und ausser dem Rückkehrpunkt r in zwei Punkten q', q'', deren Tangenten Q', Q'' sich ebenfalls in w schneiden. Die Punkte r, q, q_1, q_2 bilden ein harmonisches System, die Tangenten Q, Q', Q'' mit der in w gezogenen Wendetangente ein zweites.

§. 11.

Ueber den Zusammenhang der Curven doppelter Krümmung mit *Abel*schen Functionen.

Im Vorigen sind nur ebene Curven behandelt worden. Ich werde jetzt zeigen, wie ähnliche Principien sich für die Behandlung der Curven doppelter Krümmung aufstellen lassen.

Betrachten wir den Durchschnitt zweier algebraischen Flächen. Die eine derselben, $u=0$, sei m^{ter} Ordnung, die andere, $v=0$, n^{ter} Ordnung. Die Durchschnittscurve können wir mit zwei Ebenenbüscheln, deren Axen beliebig im Raume liegen, so in Zusammenhang bringen, dass zwei entsprechende Ebenen beider Büschel sich auf der Curve durchschneiden. Sind nämlich die Gleichungen der Büschel

$$(17.)\qquad \begin{cases}(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)+z(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4) = 0,\\ (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4)+s(\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3+\beta_4x_4) = 0,\end{cases}$$

so führt die Elimination der x aus diesen Gleichungen und aus $u=0$, $v=0$ auf eine Gleichung

$$(18.)\qquad F(s,z) = 0,$$

welche das gegenseitige Abhängigkeitsverhältniss der Parameter der Büschel ausdrückt.

Diese Gleichung ist sowohl für s als für z vom Grade $m+n$. Aber sie ist nicht unter allen Umständen irreductibel, sondern zerfällt, wenn die Oberflächen $u=0$, $v=0$ besondere Lagen gegen einander haben, von selbst in Factoren. Sei nämlich ein Theil der Schnittcurve zugleich als Theil des Durchschnitts zweier Flächen $u'=0$, $v'=0$ darstellbar, welche von niedrigerem Grade als $u=0$, $v=0$ sind; sei der zugefügte Theil a' mit einem andern a'' zusammen die Schnittcurve zweier Flächen $u''=0$, $v''=0$, welche wieder von niedrigerem Grade sind, u. s. w., bis endlich ein Curventheil $a^{(\mu-1)}$ mit einer Curve $a^{(\mu)}$ zusammen der Durchschnitt zweier Flächen $u^{(\mu)}=0$, $v^{(\mu)}=0$ ist, und $a^{(\mu)}$ sich als der vollständige Schnitt zweier Flächen von niedrigerem Grade darstellen lässt. So giebt es unzählige Oberflächenpaare deren Durchschnitt in eine andere Curve und in eine Raumcurve dritter Ordnung zerfällt; diese ist zusammen mit einer geraden Linie als Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung darstellbar, und die hinzugefügte Gerade endlich bildet den vollständigen Durchschnitt zweier Ebenen. Denken wir uns nun für alle diese Schnittcurven der Reihe nach die der Gleichung (18.) entsprechenden Gleichungen gebildet;

$$F(s,z)=0, \qquad F^{(1)}(s,z)=0, \qquad \ldots \qquad F^{(\mu+1)}(s,z)=0,$$

so müssen folgende Gleichungen bestehen, in welchen die φ ganze Functionen bedeuten:

$$\begin{aligned}
F^{(\mu)}(s,z) &= \varphi^{(\mu)}(s,z).F^{(\mu+1)}(s,z),\\
F^{(\mu-1)}(s,z) &= \varphi^{(\mu-1)}(s,z).\varphi^{(\mu)}(s,z),\\
F^{(\mu-2)}(s,z) &= \varphi^{(\mu-2)}(s,z).\varphi^{(\mu-1)}(s,z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F(s,z) &= \varphi(s,z).\varphi^{(1)}(s,z).
\end{aligned}$$

In diesem Falle ist also die Gleichung $F(s,z)=0$ reductibel, und man kann sie als dass Product zweier, oder allgemein zu reden, mehrerer irreductibler Factoren auffassen. Jeder Zweig einer Raumcurve, welcher einem solchen Factor entspricht, kann als *algebraisch definirte einfache Raumcurve* gelten. Ihre Ordnung ist die Ordnung von s und z in dem entsprechenden Factor; Ordnungen, welche immer gleich sein werden, wie aus dem eben angeführten Schema folgt, da nach dem früheren s und z in allen Functionen F zu gleichen Ordnungen vorkommen.

Jede solche einfache Raumcurve begründet nun eine Classe von *Abel*schen Functionen. Sei k die Ordnung der Curve, $\varphi(s,z)=0$ die ihr ent-

sprechende Gleichung. Die Zahl p, welche die zugehörigen *Abel*schen Functionen charakterisirt, ist dann nach §. 1. gleich $\frac{1}{2}w-(k-1)$, wo w die Anzahl derjenigen Werthsysteme s, z bedeutet, für welche $\varphi'(s)=0$, ohne dass $\varphi'(z)=0$.

Ist $\varphi'(s)=0$, so bedeutet dieses, dass die Gleichung $\varphi=0$ zwei gleiche Wurzeln s hat. Der zugehörige Werth von z bestimmt eine Ebene des ersten Büschels (17.), welcher die Curve in k Punkten schneidet; von diesen müssen zwei zusammenfallen, damit von den zugehörigen Ebenen des Büschels s zwei identisch werden. Es können nun hiebei folgende Fälle eintreten. Entweder ist die betreffende Ebene des Büschels z Tangentenebene der Curve; oder die Ebene s schneidet sich mit der Ebene z in einer Geraden, welche die Curve in zwei verschiedenen Punkten trifft; oder endlich die Curve hat einen Doppelpunkt, was eine Berührung der gegebenen Oberflächen oder einen Knotenpunkt in einer von beiden anzeigt. In den beiden letzten Fällen gehört ebensowohl ein Doppelwerth von s zu einem Werthe von z, als umgekehrt ein Doppelwerth von z zu einem Werthe von s; in beiden Fällen müssen also sowohl $\varphi'(s)$ als $\varphi'(z)$ verschwinden. Schliessen wir nur diejenigen Fälle aus, in denen der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergeht und also auch noch $\varphi''(ss)\varphi''(zz)-\varphi''(sz)^2=0$.

Die Zahl w bedeutet also offenbar den *Rang* der Curve, d. h. die Zahl derjenigen Tangenten der Curve, welche eine gegebene Gerade treffen. So oft nämlich die Axe des Büschels s von einer Tangente der Curve getroffen wird, ist eine Ebene des Büschels Tangentenebene der Curve, und also für dieselbe $\varphi'(s)=0$, ohne dass $\varphi'(z)$ verschwindet. Nach Herrn *Salmon* (Geometry of three dimensions p. 237) bestimmt sich diese Zahl aus der Formel

$$w = k(k-1)-2d,$$

wo d die Anzahl der von einem Punkte ausgehenden Strahlen bedeutet, welche der Curve zweimal begegnen, mag diese zweifache Begegnung nun, wie bei einem Doppelpunkte, in demselben, oder mag sie in verschiedenen Punkten stattfinden.

So hat man also endlich

$$p = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - d$$

für die charakteristische Zahl der der Curve zugehörigen *Abel*schen Functionen.

Ich werde im Folgenden voraussetzen, dass die betrachtete Curve der vollständige und nicht in Theile zerlegbare Durchschnitt zweier Oberflächen

sei, welche sich nicht berühren; dass die Curve keinerlei Rückkehrpunkte und Doppelpunkte besitze *). In diesem Falle wird die Ordnung der Curve $= mn$, und nach Herrn *Salmon* (l. c. p. 249) der Rang derselben

$$w = mn(m+n-2),$$

also

$$p = \frac{mn(m+n-4)}{2}+1;$$

eine Zahl welche, übereinstimmend mit dem Früheren, für $m=1$ in $\frac{n-1.n-2}{2}$ übergeht.

Es ist leicht, die p überall endlichen Integrale zu bilden, welche diesem Falle entsprechen. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4 &= 0,\\ v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3+v_4x_4 &= 0,\\ u_1dx_1+u_2dx_2+u_3dx_3+u_4dx_4 &= 0,\\ v_1dx_1+v_2dx_2+v_3dx_3+v_4dx_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(u_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad v_i=\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$$

ergeben sich folgende, in denen d_1u einen unbestimmten Factor bedeutet:

$$\begin{aligned} x_1dx_2-x_2dx_1 &= (u_3v_4-u_4v_3)d_1u, & x_2dx_3-x_3dx_2 &= (u_1v_4-u_4v_1)d_1u,\\ x_1dx_3-x_3dx_1 &= (u_4v_2-u_2v_4)d_1u, & x_3dx_4-x_4dx_3 &= (u_1v_2-u_2v_1)d_1u,\\ x_1dx_4-x_4dx_1 &= (u_2v_3-u_3v_2)d_1u, & x_4dx_2-x_2dx_4 &= (u_1v_3-u_3v_1)d_1u. \end{aligned}$$

Bezeichnen also $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ ganz beliebige Grössen, so ist der Ausdruck

$$\frac{\Sigma\pm a_1b_2x_3dx_4}{\Sigma a_iu_i.\Sigma b_iv_i-\Sigma a_iv_i.\Sigma b_iu_i} = d_1u,$$

demnach von den Werthen dieser Grössen völlig unabhängig. Derselbe ist von der $-(m+n-4)^{\text{ten}}$ Dimension; das Integral

$$\Psi = \int \frac{\Theta.\Sigma\pm a_1b_2x_3dx_4}{\Sigma a_iu_i.\Sigma b_iv_i-\Sigma a_iv_i.\Sigma b_iu_i}$$

lässt sich also mit Hülfe von $u=0$, $v=0$ als das Integral eines Differentialausdrucks mit einer einzigen Variablen darstellen, sobald Θ eine homogene Function der Ordnung $(m+n-4)$ ist. Unter den gemachten Voraussetzungen bleibt dieses

*) Eine solche Curve soll bisweilen der Kürze wegen eine Curve mn^{ter} Ordnung genannt werden. Die Natur der Curve hängt dann nicht blos von der Ordnungszahl, sondern auch von ihrer Zerlegung ab, d. h. von den Ordnungen der Flächen, welche sich in ihr durchschneiden.

Integral auch überall endlich, und es ist nur noch nöthig sich zu überzeugen, ob wirklich p Integrale durch verschiedene Annahme von Θ erhalten werden. Bemerken wir hiezu, dass Θ mit Hülfe der Gleichungen $u=0$, $v=0$ umgeformt werden kann, ohne dass das Integral sich ändert. Man kann also, wenn U, V zwei Functionen $(m-4)^{\text{ter}}$ und $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeuten, statt Θ die Function

$$\Theta + Uu + Vv$$

setzen, und die Constanten von U, V so bestimmen, dass ebensoviel Constante in Θ verschwinden. Demnach ist die Zahl der in Θ enthaltenen willkürlichen Constanten noch

$$\tfrac{1}{6}\{(m+n-1)(m+n-2)(m+n-3)-(m-1)(m-2)(m-3)-(n-1)(n-2)(n-3)\}$$
$$= \frac{mn(m+n-4)}{2}+1 = p.$$

Man erhält also wirklich weder mehr noch weniger als p unabhängige, überall endliche Integrale, indem man diesen Constanten alle möglichen Werthe beilegt.

§. 12.

Der *Abel*sche Satz auf den Schnitt algebraischer Flächen angewandt.

Es sei nun $w=0$ eine Oberfläche k^{ter} Ordnung. Betrachten wir den Ausdruck $\Sigma\Psi$ ausgedehnt über alle Schnittpunkte der Fläche $w=0$ mit der gegebenen Curve. Führen wir bei der Integration wieder die Coefficienten einer Function w durch die Gleichung $w=0$ als Variable ein, so dass erst in den oberen Grenzen w in die gegebene Fläche übergehe. Bezeichnen wir durch δw, was aus w durch Variation der Coefficienten entsteht, so ist

$$\Sigma w_i dx_i = -\delta w.$$

Multipliciren wir also unter dem Integralzeichen von Ψ mit der Determinante

$$\Sigma \pm c_1 u_2 v_3 w_4,$$

so erhalten wir im Zähler:

$$\Sigma \pm a_1 b_2 x_3 dx_4 . \Sigma \pm c_1 u_2 v_3 w_4 = \begin{vmatrix} \Sigma a_i c_i & \Sigma b_i c_i & \Sigma c_i x_i & \Sigma c_i dx_i \\ \Sigma a_i u_i & \Sigma b_i u_i & 0 & 0 \\ \Sigma a_i v_i & \Sigma b_i v_i & 0 & 0 \\ \Sigma a_i w_i & \Sigma b_i w_i & 0 & -\delta w \end{vmatrix}$$
$$= -\delta w . \Sigma c_i x_i . \{\Sigma a_i u_i \Sigma b_i v_i - \Sigma b_i u_i \Sigma a_i v_i\},$$

also

$$\Psi = -\int \frac{\Theta . \Sigma c_i x_i . \delta w}{\Sigma \pm c_1 u_2 v_3 w_4}.$$

Bilden wir nun die Summe solcher Ausdrücke, über die betrachteten Schnittpunkte ausgedehnt:

$$(19.) \qquad \Sigma \Psi = -\int \Sigma \frac{\Theta . \Sigma c_i x_i . \delta w}{\Sigma \pm c_1 u_2 v_3 w_4},$$

und setzen wir über Θ nur voraus, dass es eine homogene Function $m+n-4^{ter}$ Ordnung sei, so ist mit der Variation jedes Coefficienten von w nur eine rationale symmetrische Function der Coordinaten aller Schnittpunkte multiplicirt, welche sich durch die Coefficienten von w rational ausdrücken lässt. Die Ausführung der Integration kann also nur auf rationale und logarithmische Functionen der Coefficienten von w führen. Und so hat man folgenden Satz:

Wenn man die Schnittcurve zweier Flächen $u=0$, $v=0$ m^{ter} und n^{ter} Ordnung durch eine Oberfläche $w=0$ schneidet, und wenn Θ eine homogene rationale Function $(m+n-4)^{ter}$ Ordnung ist, so wird die Summe der Integrale

$$\int \frac{\Theta . \Sigma \pm a_i b_i x_i dx_i}{\Sigma a_i u_i . \Sigma b_i v_i - \Sigma b_i u_i . \Sigma a_i v_i},$$

ausgedehnt über alle Schnittpunkte der Curve mit $w=0$, ein Aggregat rationaler und logarithmischer Functionen der Coefficienten von w.

Man kann indess, wie im folgenden §. geschehen soll, nachweisen, dass, wenn Θ eine *ganze* Function $(m+n-4)^{ter}$ Ordnung ist, in der Gleichung (19.) der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck verschwindet, indem überhaupt die Summe der Ausdrücke

$$\frac{F . \Sigma c_i x_i}{\Sigma \pm c_1 u_2 v_3 w_4},$$

wo F eine homogene Function $(m+n+k-4)^{ter}$ Ordnung ist, verschwindet, wenn man sie über die Schnittpunkte der Flächen $u=0$, $v=0$, $w=0$ ausdehnt. Dann wird $\Sigma\Psi$ eine Constante, und man erhält den Satz:

Die Summe der Integrale

$$\int \frac{\Theta . \Sigma \pm a_1 b_2 x_3 dx_4}{\Sigma a_i u_i . \Sigma b_i v_i - \Sigma a_i v_i . \Sigma b_i u_i},$$

wo Θ eine ganze Function $(m+n-4)^{ter}$ Ordnung ist, wird einer Constanten gleich, wenn man die Summe ausdehnt über alle Schnittpunkte der Flächen m^{ter}, n^{ter} und k^{ter} Ordnung $u=0$, $v=0$, $w=0$.

Diese Sätze sind specielle Fälle des folgenden, welcher für eine beliebige Anzahl von Variabeln ausgesprochen ist:

Die Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_r$ seien mit einander in Verbindung gesetzt durch die Gleichungen

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots \quad u_{r-2} = 0,$$

welche in Bezug auf jene homogen und von der Ordnung $m_1, m_2, \ldots m_{r-2}$ sein sollen. Wählen wir nun ganz beliebig irgend $r(r-2)$ Grössen

$$\begin{array}{cccc} a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & \ldots & a_r^{(1)}, \\ a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & \ldots & a_r^{(2)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(r-2)}, & a_2^{(r-2)}, & \ldots & a_r^{(r-2)}, \end{array}$$

und bezeichnen durch $\alpha_k^{(i)}$ den Ausdruck

$$\alpha_k^{(i)} = a_1^{(i)} \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + a_2^{(i)} \frac{\partial u_k}{\partial x_2} \cdots + a_r^{(i)} \frac{\partial u_k}{\partial x_r},$$

ist endlich Θ eine homogene Function $(m_1 + m_2 + \cdots + m_{r-2} - r)^{\text{ter}}$ Ordnung, so ist die Summe der Integrale

$$\int \frac{\Theta . \Sigma \pm a_1^{(1)} a_2^{(2)} \ldots a_{r-2}^{(r-2)} x_{r-1} dx_r}{\Sigma \pm \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \ldots \alpha_r^{(r)}},$$

ausgedehnt über alle Werthsysteme, welche die gegebenen Gleichungen zusammen mit einer $(r-1)^{ten}$ Gleichung $u = 0$ bestimmen, aus algebraischen und logarithmischen Functionen der Coefficienten der letzten Gleichung zusammengesetzt, und ist insbesondere constant, wenn Θ eine ganze Function ist.

§. 13.

Erweiterung eines von *Jacobi* aufgestellten algebraischen Satzes.

Den oben angewandten Hülfssatz kann man nun für beliebig viel Variable, den von *Jacobi* (dieses Journal Bd. 14, pag. 281.) geführten Beweis erweiternd, folgendermassen ableiten.

Es seien s Gleichungen

$$u^{(1)} = 0, \quad u^{(2)} = 0, \quad \ldots \quad u^{(s)} = 0$$

gegeben, welche die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_s$, nicht homogen, enthalten. Die Anzahl der allen gemeinsamen Lösungen ist μ. Man kann diese Lösungen finden, indem man alle Unbekannte bis auf eine eliminirt, und dann eine

Gleichung μ^{ten} Grades auflöst. Je nachdem $x_1, x_2 \ldots x_s$ die beibehaltene Unbekannte ist, mögen diese Endgleichungen μ^{ten} Grades durch

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \ldots \quad X_s = 0$$

bezeichnet sein. Man kann dann identisch setzen:

$$(20.) \quad \begin{cases} M_1^{(1)} u^{(1)} + M_1^{(2)} u^{(2)} + \cdots + M_1^{(s)} u^{(s)} = X_1, \\ M_2^{(1)} u^{(1)} + M_2^{(2)} u^{(2)} + \cdots + M_2^{(s)} u^{(s)} = X_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ M_s^{(1)} u^{(1)} + M_s^{(2)} u^{(2)} + \cdots + M_s^{(s)} u^{(s)} = X_s; \end{cases}$$

und zwar ist dabei, wenn $m^{(i)}$ den Grad von $u^{(i)}$ bezeichnet, $M_k^{(i)}$ von der Ordnung $\mu - m^{(i)}$. Setzen wir nun in diesen Gleichungen für die x Werthe, welche zwar einzeln den Gleichungen $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $\ldots$ $X_s = 0$ genügen, aber kein zusammengehöriges, den gegebenen Gleichungen genügendes Werthsystem bilden, so verschwinden in (20.) die linken Seiten, nicht aber die u, *und es muss also die Determinante der M verschwinden.*

Differentiiren wir nun die Gleichungen (20.) nach den verschiedenen x, und setzen sodann zusammengehörige Werthsysteme ein. Aus der Differentiation der i^{ten} Gleichung erhalten wir das System

$$\begin{aligned} M_i^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1} + M_i^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_1} + \cdots + M_i^{(s)} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_1} &= 0, \\ M_i^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2} + M_i^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2} + \cdots + M_i^{(s)} \frac{\partial u^{(s)}}{dx_2} &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ M_i^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_i} + M_i^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_i} + \cdots + M_i^{(s)} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_i} &= \frac{\partial X_i}{\partial x_i}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ M_i^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_s} + M_i^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_s} + \cdots + M_i^{(s)} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_s} &= 0, \end{aligned}$$

und, wenn R die Functionaldeterminante der u ist, durch Auflösung:

$$R \cdot M_i^{(h)} = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial u^{(h)}}{\partial x_i}}.$$

Bildet man also jetzt die Determinante Δ der M für ein solches zusammengehöriges System der x, so findet sich:

$$(21.) \quad \Delta = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial X_s}{\partial x_s}.$$

Inzwischen hat man nach den gewöhnlichen Regeln der Partialbruchzerlegung:

$$\frac{\Delta}{X_1 X_2 \dots X_s} = \Sigma \left(\frac{\Delta}{\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial X_s}{\partial x_s}} \right) \cdot \frac{1}{x_1 - x_1' \,.\, x_2 - x_2' \dots x_s - x_s'},$$

wo x_1', x_2', $\dots$ x_s' irgend welche Wurzeln von $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $\dots$ $X_s = 0$ bedeuten, welche in dem eingeklammerten Ausdruck für x_1, x_2, $\dots$ x_s zu setzen sind, und wo die Summe sich auf alle möglichen Combinationen dieser Wurzeln bezieht. Nun ist nach dem Vorigen der eingeklammerte Ausdruck 0 oder gleich dem entsprechenden Werth von $\frac{1}{R}$, jenachdem die x' ein zusammengehöriges System bilden oder nicht. Bezeichnen wir also die zusammengehörigen Systeme durch obere Indices 1, 2, $\dots$ μ, so hat man

$$(22.) \qquad \frac{\Delta}{X_1 X_2 \dots X_s} = \sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{1}{R^{(h)} \,.\, x_1 - x_1^{(h)} \,.\, x_2 - x_2^{(h)} \dots x_s - x_s^{(h)}}.$$

Die Formel kann, entsprechend einer Bemerkung von *Jacobi*, dazu angewandt werden, die Werthe der Summen

$$\sum_{h=1}^{h=\mu} \left(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_s^{\alpha_s} \right)^h$$

zu bestimmen, wo keiner der Exponenten α verschwindet. Multipliciren wir nämlich (22.) mit irgend einer Function Ω von x_1, x_2, $\dots$ x_s. Der Werth von Ω für das h^{te} zusammengehörige System sei $\Omega^{(h)}$; man hat dann

$$\Omega = \Omega^{(h)} + A_1 (x_1 - x_1^{(h)}) + A_2 (x_2 - x_2^{(h)}) \dots .$$

Beschränkt man sich also auf diejenigen Terme, welche nach absteigenden Potenzen der x entwickelt, negative Potenzen sämmtlicher x enthalten, so kann man rechts in (22.) unter dem Summenzeichen $\Omega^{(h)}$ statt Ω setzen. Und setzt man endlich $\Omega = R$, so findet man, *dass die Entwicklung von* $\frac{\Delta R}{X_1 X_2 \dots X_s}$ *mit der Entwicklung der Summe*

$$\sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{1}{x_1 - x_1^{(h)} \,.\, x_2 - x_2^{(h)} \dots x_s - x_s^{(h)}}$$

in allen denjenigen Termen übereinstimmt, welche negative Potenzen sämmtlicher x enthalten; dass also

$$\sum_{h=1}^{h=\mu} \left(x_1^{(h)}\right)^{\alpha_1} \,.\, \left(x_2^{(h)}\right)^{\alpha_2} \dots \left(x_s^{(h)}\right)^{\alpha_s}$$

gleich dem Coefficienten von $x_1^{-\alpha_1 - 1} \,.\, x_2^{-\alpha_2 - 1} \dots x_s^{-\alpha_s - 1}$ *in der Entwicklung von* $\frac{\Delta R}{X_1 X_2 \dots X_s}$ *ist, sobald keines der α verschwindet.*

In der Formel (22.) ist Δ von der Ordnung

$$s\mu - m^{(1)} - m^{(2)} - \cdots - m^{(s)},$$

während der Nenner $X_1 X_2 \ldots X_s$ von der Ordnung $s\mu$ ist. Entwickelt man also in (22.) rechts nach absteigenden Potenzen der x, so verschwinden die Summen der Coefficienten von $x_1^{-\alpha_1-1} . x_2^{-\alpha_2-1} \ldots x_s^{-\alpha_s-1}$, d. h. die Summen

$$\sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{(x_1^{(h)})^{\alpha_1} . (x_2^{(h)})^{\alpha_2} \ldots (x_s^{(h)})^{\alpha_s}}{R^{(h)}},$$

sobald $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s < m^{(1)} + m^{(2)} + \cdots + m^{(s)} - s$. Und man hat also den Satz:

Ist R die Functionaldeterminante der s Functionen $m^{(1)ten}$, $m^{(2)ten}$, ... $m^{(s)ten}$ Grades $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, ... $u^{(s)}$ nach den Variabeln x_1, x_2, ... x_s, und ist F irgend eine Function der x, welche den Grad $m^{(1)} + m^{(2)} + \cdots + m^{(s)} - s - 1$ nicht übersteigt, so verschwindet die Summe der Werthe von $\frac{F}{R}$, genommen für alle Werthsysteme der x, welche den Gleichungen

$$u^{(1)} = 0, \quad u^{(2)} = 0, \quad \ldots \quad u^{(s)} = 0$$

*genügen *).*

Lassen wir endlich x_1, x_2, ... x_s übergehen in $\frac{y_1}{y}$, $\frac{y_2}{y}$, ... $\frac{y_s}{y}$, und die u in homogene Functionen v dieser $s+1$ Variablen, dividirt durch die entsprechenden Potenzen von y. Ist dann D die Functionaldeterminante der v nach y_1, y_2, ... y_s, so hat man auch

$$R = \frac{D}{y^{m^{(1)}+m^{(2)}+\ldots+m^{(s)}-s}};$$

und da auch F in eine homogene Function Φ dividirt durch $y^{m^{(1)}+m^{(2)}+\ldots+m^{(s)}-s-1}$ übergeht, so erhält man die Formel

$$0 = \Sigma \frac{\Phi . y}{D}.$$

Weil nun die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
y\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} + y_1\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y_1} + \cdots + y_s\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y_s} &= 0,\\
y\frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} + y_2\frac{\partial v^{(2)}}{\partial y_1} + \cdots + y_s\frac{\partial v^{(2)}}{\partial y_s} &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots

so verhält sich

$$y : y_1 : \ldots : y_s = D : D_1 : \ldots : D_s,$$

wo D_i die Functionaldeterminante der v nach den y mit Auschluss von y_i, und mit passend gewähltem Vorzeichen bedeutet. Es ist daher auch

$$\frac{y}{D} = \frac{cy + c_1 y_1 + \cdots + c_s y_s}{\Sigma \pm c \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y_1} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial v^{(s)}}{\partial y_s}},$$

welche Werthe auch den c beigelegt werden. Und endlich hat man den Satz, welcher der oben angewandte Hülfsatz selbst ist:

Sind $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots v^{(s)}$ homogene Functionen von $y, y_1, \ldots y_s$ von den Ordnungen $m_1, m_2, \ldots m_s$, und ist Φ eine homogene Function der Ordnung $m^{(1)} + m^{(2)} + \cdots + m^{(s)} - s - 1$, so verschwindet immer die Summe der Ausdrücke

$$\frac{\Phi . (cy + c_1 y_1 + \cdots + c_s y_s)}{\Sigma \pm c \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial v^{(s)}}{\partial y_s}},$$

gebildet für alle Werthsysteme der y, welche den Gleichungen $v^{(1)} = 0$. $v^{(2)} = 0, \ldots v^{(s)} = 0$ gleichzeitig genügen.

§. 14.

Bestimmung der Constanten, und Umkehrung des Satzes über die Punkte einer Curve mn^{ter} Ordnung, welche auf einer Fläche k^{ter} Ordnung liegen.

Kehren wir zu der vollständigen und nicht zerfällbaren Schnittcurve der Flächen $u = 0$, $v = 0$ m^{ter} und n^{ter} Ordnung zurück. Die irgend einem Punkte der Curve entsprechenden überall endlichen Integrale seien wieder $u_1, u_2, \ldots u_p$ $\left(p = \frac{mn(m+n-4)}{2} + 1\right)$, und werden für verschiedene Punkte durch obere Indices unterschieden.

Für die mnk Schnittpunkte der Curve mit einer Fläche k^{ter} Ordnung. $w = 0$, hat man dann nach dem Vorigen:

$$(23.) \quad \begin{cases} u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \cdots + u_1^{(mnk)} \equiv \gamma_1, \\ u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \cdots + u_2^{(mnk)} \equiv \gamma_2. \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_p^{(1)} + u_p^{(2)} + \cdots + u_p^{(mnk)} \equiv \gamma_p, \end{cases}$$

wo die γ nur noch von der *Ordnung* von w abhängen. Da ferner die Fläche n^{ter} Ordnung als System von k Ebenen erscheinen kann, so hat man offenbar

$\gamma_i = k.c_i$, wo die c dem Durchschnitt einer Ebene mit der Curve entsprechen. Endlich sind (vgl. §. 3) diese Constanten Null, wenn w in eine Function Θ übergeht, also für $k = m+n-4$, und sind daher überhaupt Null. Und man hat den Satz:

Die Summen der entsprechenden, überall endlichen Integrale, ausgedehnt über die Schnittpunkte einer algebraischen Fläche mit der gegebenen Curve, sind gleich Null.

Nach *Jacobi* (dieses Journal Bd. 15, p. 305) bestimmen sich von solchen mnk Punkten einer gegebenen Schnittcurve zweier Flächen m^{ter} und n^{ter} Ordnung, welche auf einer Fläche k^{ter} Ordnung liegen können, immer eine gewisse Zahl durch die übrigen; und zwar ist die Zahl der durch die übrigen bestimmten, wenn

$$k \geqq m+n-3, \quad k \equiv m, \quad k \equiv n,$$

genau gleich p. Ist aber $k < m+n-3$, so wird diese Zahl kleiner, nämlich gleich

$$p - \frac{m+n-k-1 \,.\, m+n-k-2 \,.\, m+n-k-3}{6},$$

so lange k grösser als die Zahlen m, n bleibt; sie ist gleich

$$mnk - \frac{k+1 \,.\, k+2 \,.\, k+3}{6} + \frac{k-n+1 \,.\, k-n+2 \,.\, k-n+3}{6} + 1,$$

wenn $m > k \equiv n-3$, und gleich

$$mnk - \frac{k+1 \,.\, k+2 \,.\, k+3}{6} + 1,$$

wenn k kleiner ist als beide Zahlen. Hieraus geht hervor, *dass, wenn* $k \geqq m+n-3$, *die Zahl der Gleichungen* (23.) *genau gleich der Zahl der mittelst derselben zu bestimmenden Punkte ist, welche neben einer Anzahl beliebig zu wählender auf einer Fläche* k^{ter} *Ordnung liegen können; und dass, wenn* $k < m+n-3$, *die Anzahl jener Gleichungen grösser, insbesondere bei* $k = m+n-4$, *um* 1 *grösser ist, ohne dass dieselben deswegen aufhören können verträglich zu sein.*

Bemerken wir nun, dass nach dem *Abel*schen Theorem die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} du_1^{(1)} + du_1^{(2)} + \cdots + du_1^{(mnk)} &= 0, \\ du_2^{(1)} + du_2^{(2)} + \cdots + du_2^{(mnk)} &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ du_p^{(1)} + du_p^{(2)} + \cdots + du_p^{(mnk)} &= 0 \end{aligned}$$

die vollständige algebraische Integration zulassen, so sehen wir, dass insbesondere diese algebraischen Integrale vermittelst einer geeigneten Bestimmung der in ihnen enthaltenen Constanten dahin müssen gebracht werden können, die Bedingungen auszudrücken, unter welchen *mnk* Punkte der Curve auf einer Fläche k^{ter} Ordnung liegen. Da nun die passende Bestimmung dieser Constanten in der transcendenten Form der Integralgleichungen soeben geleistet ist, so kann man den umgekehrten Satz aufstellen:

Sobald zwischen den überall endlich bleibenden, den von Herrn Riemann aufgestellten Bedingungen gemäss gebildeten Integralen die Gleichungen bestehen:

$$(24.)\qquad \begin{cases} u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \cdots + u_1^{(mnk)} = 0, \\ u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \cdots + u_2^{(mnk)} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_p^{(1)} + u_p^{(2)} + \cdots + u_p^{(mnk)} = 0, \end{cases}$$

liegen die entsprechenden mnk Punkte der Curve auf einer Fläche k^{ter} Ordnung.

§. 15.

Berührungsflächen, welche durch gegebene Punkte der Curve gehen. Systeme von Berührungsflächen.

Die Aufgaben, welche im Früheren bei ebenen Curven behandelt sind, können nun in ganz ähnlicher Weise bei Raumcurven durchgeführt werden.

*Es sei $k \geqq m+n-3$; auf der Curve mn^{ter} Ordnung seien $mnk-pr$ Punkte beliebig gegeben: man soll durch sie eine Fläche k^{ter} Ordnung *) legen, welche die Curve in p Punkten r-punktig berührt.*

$$\left(p = \frac{mn(m+n-4)}{2} + 1\right).$$

---

*) Ist $k \geqq n$, $k < m$, so wird die Fläche k^{ter} Ordnung insofern unbestimmt, als jede Fläche k^{ter} Ordnung, welche durch den Schnitt derselben mit der Fläche n^{ter} Ordnung hindurchgeht, denselben Bedingungen genügt. In diesem Falle kann man also statt von der Fläche k^{ter} Ordnung, von der *Raumcurve* kn^{ter} Ordnung sprechen, welche bei solchen Veränderungen constant bleibt, und kann dieser die Eigenschaften beilegen, welche von der Fläche k^{ter} Ordnung gefordert werden. Ist dagegen k auch $\geqq m$, so hat jede Fläche die verlangten Eigenschaften, welche durch die Schnittpunkte der drei Flächen m^{ter}, n^{ter}, k^{ter} Ordnung hindurchgeht. In diesem Falle also hat man es nur noch mit einem bestimmten Punktsystem zu thun, welches das gemeinsame Element eines Flächenbündels bildet.

Die Anzahl der in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen ist

$$mnk-pr+p(r-1) = mnk-p.$$

Nehmen wir hinzu, dass nach dem Vorigen für die mnk Schnittpunkte einer Fläche k^{ter} Ordnung mit der Curve p Bedingungen eintreten, so sieht man, dass die Aufgabe sowohl bestimmt als lösbar ist. Aber nur die Berührungspunkte sind unter allen Umständen wirklich bestimmt; die Fläche k^{ter} Ordnung selbst kann, je nach der Grösse von k, mehr oder minder willkürlich bleiben.

Die den gegebenen Schnittpunkten entsprechenden Integralsummen seien nun U_1, U_2, ... U_p; die den gesuchten p Berührungspunkten entsprechenden seien v_1, v_2, ... v_p. Die Gleichungen (24.) gehen dann für den vorliegenden Fall über in:

$$\begin{aligned} rv_1 &\equiv -U_1, \\ rv_2 &\equiv -U_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ rv_p &\equiv -U_p, \end{aligned}$$

oder in:

$$\begin{aligned} v_1 &\equiv -\frac{U_1}{r}+\frac{A_1}{r}, \\ v_2 &\equiv -\frac{U_2}{r}+\frac{A_2}{r}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_p &\equiv -\frac{U_p}{r}+\frac{A_p}{r}. \end{aligned}$$

Die p Berührungspunkte bestimmen sich also durch eine Gleichung p^{ten} Grades, deren Coefficienten θ-Functionen mit den Argumenten v sind. Die letzteren enthalten die $2p$ Zahlen m, q in den A, und da jeder derselben alle Werthe von 0 bis $r-1$ beigelegt werden dürfen, *so ist die Anzahl aller Lösungen des Problems:*

$$r^{2p} = r^{mn(m+n-4)+2}.$$

Man kann hier ähnliche Betrachtungen anstellen, wie in §. 4, und findet den Satz:

Wenn man durch $r-1$ Systeme von Berührungspunkten und durch die gegebenen Punkte eine Fläche k^{ter} Ordnung legt, so schneidet sie die gegebene Curve in p Punkten, in denen eine durch die gegebenen Punkte gehende Fläche k^{ter} Ordnung die Curve berührt.

Von den $r-1$ Systemen können mehrere zusammenfallen, wo denn die erst-erwähnte Fläche k^{ter} Ordnung an solchen Punkten berühren muss.

Von den gegebenen Punkten können selbst μ mal r so zusammentreten, dass in ihnen die gesuchte Fläche ebenfalls r-punktig berührt. Alsdann berühren also die betrachteten Flächen in $(p+\mu)$ Punkten r-punktig, und gehen ausserdem durch $mnk-(p+\mu)r$ gegebene Punkte.

Lassen wir nur die letzteren gegeben sein, so wird die Aufgabe offenbar unbestimmt, und es können immer μ Berührungspunkte beliebig gewählt werden, wo denn jedesmal die Aufgabe noch r^{2p} Lösungen gestattet.

Hiebei entsteht der Begriff eines *Systems von Berührungsflächen*. Durch continuirliche Aenderung der μ wählbaren Berührungspunkte kann man aus einer Berührungsfläche unendlich viele stetig ableiten; aber nur diejenigen, für welche das System der A dasselbe ist. Bezeichnen wir also *als System von Berührungsflächen solche, die durch stetigen Uebergang aus einander abgeleitet werden können*, so hat man den Satz:

> *Eine Curve $m.n^{ter}$ Ordnung lässt $r^{mn(m+n-4)+2}$ Systeme von Berührungsflächen k^{ter} Ordnung zu, welche die Curve in $p+\mu$ Punkten r-punktig berühren, und ausserdem durch $mnk-(p+\mu)r$ auf der Curve gegebene Punkte geht; wobei $k \geqq m+n-3$ vorausgesetzt wird.*

Und man hat über dieselben (vgl. §. 5.) folgende Sätze:

> *Die Berührungspunkte von irgend r Flächen desselben Systems liegen auf einer Fläche k^{ter} Ordnung, welche durch die festen Punkte hindurchgeht.*
>
> *Legt man durch die gegebenen Punkte und durch $r-1$ Systeme von je $p+\mu$ Berührungspunkten, welche gleichen oder verschiedenen Systemen angehören können, eine Fläche k^{ter} Ordnung, so trifft dieselbe noch immer ein r^{tes} System von Berührungspunkten.*

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo mnk durch r theilbar ist. In diesem Falle kann man alle Schnittpunkte der Fläche k^{ter} Ordnung mit der Curve zu r in $\frac{mnk}{r}$ Punkte zusammenrücken lassen, und man erhält dann Systeme von Berührungsflächen, welche die gegebene Curve r-punktig berühren, wo sie derselben begegnen. Diese Systeme sind dadurch wichtig, dass sie nur noch von der Natur der Curve selbst abhängen, nicht mehr von der Lage eines beliebig auf ihr gewählten Punktsystems. Die $p+\mu=\frac{mnk}{r}$ Integrale u_h, welche den Berührungspunkten entsprechen, werden hier be-

stimmt durch Gleichungen der Form:

$$u_h^{(1)} + u_h^{(2)} + \cdots + u_h^{\left(\frac{mnk}{r}\right)} \equiv \frac{A_h}{r}.$$

Man leitet daraus, wie in §. 6, den Satz ab:

Wenn $k \gtreqless m+n-3$ *und* $mn = (p+\mu)r$, *so giebt es Systeme von Flächen* k^{ter} *Ordnung, welche die Curve* $m.n^{ter}$ *Ordnung in* $p+\mu$ *Punkten* r*-punktig berühren. Die Zahl der Systeme ist* r^{2p}, *wenn* k *und* r *relative Primzahlen sind; ist dagegen* $k = k's$, $r = r's$, *und sind* k', r' *relative Primzahlen, so ist die Anzahl der Systeme* $r^{2p} - r'^{2p}$.

Sätze über die Lage der Berührungspunkte erhält man, wie in §. 6 angedeutet ist.

§. 16.

Berührungsflächen, welche nur in endlicher Anzahl existiren.

Unter den soeben behandelten Aufgaben zeichnen einige sich durch die Eigenschaft aus, völlig bestimmt zu sein.

Ist $k \gtreqless m+n-3$ und $mnk = pr$, so hat man eine in p Punkten r-punktig berührende Fläche vor sich, deren Berührungspunkte wenigstens vollkommen bestimmt sind. Nun können die Zahlen mn und $p = \frac{mn(m+n-4)}{2} + 1$ nur den Factor 2 gemein haben, und zwar auch diesen nur, wenn eine der Zahlen m, n die Form $4h+2$ hat, während die andere ungerade ist. In diesem Falle setze man

$$k = \frac{p}{2} \cdot s, \quad r = \frac{mn}{2} \cdot s,$$

in jedem anderen

$$k = p.s, \quad r = mn.s,$$

und man erhält nach den Sätzen des vorigen §. für die in Rede stehenden Aufgaben, deren Lösung auf der Hand liegt, folgende Bestimmungen:

Für eine Curve $m.n^{ter}$ *Ordnung giebt es* $n^{2p}(s^{2p}-1)$ *Berührungsflächen der Ordnung* $p.s$, *welche in* p *Punkten* $mn.s$*-punktig berühren. Nur wenn eine der Zahlen* m, n *von der Form* $4h+2$, *die andere ungerade ist, giebt es* $\left(\frac{n}{2}\right)^{2p}(s^{2p}-1)$ *Berührungsflächen von der Ordnung* $\frac{p}{2} \cdot s$, *welche in* p *Punkten* $\frac{mn}{2} \cdot s$*-punktig berühren.*

Ueber die gegenseitige Lage der Systeme von Berührungspunkten gelten analoge Sätze wie bei den Systemen von Berührungsflächen.

Aber zu diesen Aufgaben treten andere, welche ebenfalls völlig bestimmt und dadurch merkwürdig sind, dass für $n=1$, $m=4$ die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung als specieller Fall erscheinen. Ist nämlich $k<m+n-3$, aber zugleich k gleich oder grösser als die Zahlen m, n, so ist nach §. 16 die zur Bestimmung der Schnittpunkte der Fläche mit der Curve gleich

$$p-\frac{m+n-k-1.m+n-k-2.m+n-k-3}{6}.$$

Damit eine Fläche n^{ter} Ordnung überall, wo sie die Curve trifft, r-punktig berühre, sind $mnk\cdot\frac{r-1}{r}$ Bedingungen zu erfüllen. Diese Zahl wird der vorigen gleich, und also die Aufgabe völlig bestimmt, wenn $r=2$, $k=m+n-4$. Und man hat also den Satz:

Die Curve $m.n^{ter}$ Ordnung kann von einer bestimmten Anzahl von Flächen der Ordnung $m+n-4$ in $\frac{mn(m+n-4)}{2}$ Punkten zweipunktig berührt werden.

Dies ist selbst dann noch richtig, wenn, was anfangs ausgeschlossen wurde, $k=m+n-4$ kleiner als eine der Zahlen m oder n wird. Ist nämlich $n=2$ oder $n=3$, so hat man $k=m-2$ oder $k=m-1$. Nach §. 16 muss, damit der vorstehende Satz dann noch richtig bleibe, die Gleichung

$$mnk-\frac{k+1.k+2.k+3}{6}+\frac{k-n+1.k-n+2.k-n+3}{6}+1=\frac{mnk}{2}$$

stattfinden, was wirklich der Fall ist.

Die Berührungspunkte einer solchen Fläche werden, wie in §. 8 die Berührungspunkte der Curven, aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)}+u_1^{(2)}+\cdots+u_1^{(p-1)} &\equiv \frac{A_1}{2},\\
u_2^{(1)}+u_2^{(2)}+\cdots+u_2^{(p-1)} &\equiv \frac{A_2}{2},\\
\cdots\cdots\cdots

Die Anzahl dieser Berührungsflächen ist:

$$2^{\frac{mn(m+n-4)}{2}}\{2^{\frac{mn(m+n-4)}{2}+1}-1\}.$$

Ueber die gegenseitige Lage der Systeme von Berührungspunkten vgl. §. 8. Insbesondere findet sich, ähnlich wie dort, hier der Satz:

Unter den $2^{2p}\left(p=\frac{mn(m+n-4)}{2}+1\right)$ *Systemen von Berührungsflächen* k^{ter} *Ordnung, welche, bei geradem* $m+n$ *von gerader, bei ungeradem* $m+n$ *von ungerader Ordnung sind, und welche die Curve* $m.n^{ter}$ *Ordnung überall, wo sie derselben begegnen, zweipunktig berühren, giebt es immer* $2^{p-1}(2^p-1)$ *Systeme, bei welchen die Berührungspunkte jeder Fläche mit denen einer bestimmten der vorhin behandelten Berührungsflächen* $(m+n-4)^{ter}$ *Ordnung in einer Fläche* $\frac{k+m+n-4}{2}^{ter}$ *Ordnung liegen; und es giebt, wenn* $m+n$ *gerade,* $2^{p-1}(2^p+1)-1$, *wenn* $m+n$ *ungerade,* $2^{p-1}(2^p+1)$ *solcher Systeme, bei welchen die Berührungspunkte einer Fläche niemals auf einer Fläche der Ordnung* $\frac{k+m+n-4}{2}$ *liegen.*

§. 17.

Curven vierter Ordnung, welche den Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung bilden.

Die einfachsten vollständigen Raumcurven sind die der vierten Ordnung, welche den Durchschnitt zweier Flächen der zweiten Ordnung bilden. Für diese ist $p=1$, sie führen also auf elliptische Functionen, wovon man sich auch durch directe Betrachtung des überall endlich bleibenden Integrals überzeugt. Vier Punkte, welche in einer Ebene liegen, genügen dann bei geeigneter Bestimmung über den Anfangswerth jenes Integrals der Gleichung:

$$u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}+u^{(4)} \equiv 0.$$

Statt der Modulsysteme A kann man hier die Grössen $2aK+2biK'$ setzen. Zunächst also findet man, indem man die Grössen u sämmtlich einander gleich setzt, *die Punkte, in welchen eine Ebene vierpunktig berühren kann,* aus der Formel:

$$(25.) \qquad u \equiv \frac{2aK+2biK'}{4}.$$

Die Zahlen a, b können die Werthe 0, 1, 2, 3 erhalten; *die Anzahl solcher Punkte ist also 16,* wie bekannt. Für einen derselben ist $a=0$, $b=0$, also auch $u=0$; *die untere Grenze des Integrals u ist daher so zu wählen, dass für den Berührungspunkt einer Wendungsberührebene das Integral verschwindet.*

Lässt man nur drei der u einander gleich werden, so hat man eine Gleichung der Form:

$$u+3u' \equiv 0,$$

oder

$$(26.) \quad u' \equiv -\frac{u}{3}+\frac{2aK+2biK'}{3},$$

woraus der Satz folgt:

Durch jeden Punkt der Curve vierter Ordnung kann man neun Schmiegungsebenen an die Curve legen.

Unter diesen ist die Schwingungsebene im Punkte selbst nicht enthalten.

Lässt man nur zwei der u einander gleich werden, so hat man

$$(27.) \quad u'' \equiv -\frac{u+u'}{2}+\frac{2aK+2biK'}{2},$$

d. h.

Durch je zwei Punkte der Curve lassen sich vier Tangentenebenen an dieselbe legen.

Werden auch die andern u einander gleich, so hat man eine doppeltberührende Ebene, und für die Berührungspunkte

$$(28.) \quad u+u' = \frac{2aK+2biK'}{2},$$

d. h.

Es giebt vier Systeme von Ebenen, welche die Curve zweimal berühren, und durch jede Tangente geht eine Ebene jedes Systems.

Wenn man die vier Argumente u'', welche aus der Gleichung (27.) entspringen, addirt, so findet man ihre Summe gleich $-2(u+u')$, d. h.

Durch irgend zwei Punkte der Curve und die Berührungspunkte der durch sie an die Curve gelegten Tangentenebenen, lässt sich eine Schaar von Flächen zweiter Ordnung legen, welche in den gegebenen Punkten die Curve berühren.

Von den 9 Punkten (26.), in denen eine aus einem gegebenen Punkte gelegte Schmiegungsebene die Curve berühren kann, liegen drei mit dem gegebenen in einer Ebene, so oft die Summen der entsprechenden a und der entsprechenden b durch drei theilbar sind. Mit Rücksicht auf die von mir pag. 111 dieses Bandes gegebene Darstellung der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung kann man diese Beziehungen durch folgenden Satz ausdrücken:

Wenn man einen Punkt der Curve vierter Ordnung mit denjenigen 9 Punkten verbindet, in denen eine von demselben gelegte Schmiegungs-

ebene die Curve berühren kann, und wenn man diese 9 Strahlen durch irgend eine Ebene schneidet, so erhält man ein Punktsystem, welches das System von Wendepunkten einer Curve dritter Ordnung sein kann.

Ferner:

So oft drei dieser 9 Punkte mit dem gegebenen in einer Ebene liegen, liegen die anderen 6 auf einer Schaar von Flächen zweiter Ordnung, welche in dem gegebenen Punkte die Curve berühren.

Alle 9 Punkte liegen auf einer Schaar von Flächen dritter Ordnung, welche in dem gegebenen Punkte die Curve dreipunktig berühren.

Betrachten wir noch die gegenseitige Lage der Berührungspunkte der Wendungsberührebenen, welche durch die Formel (25.) gegeben sind. Bezeichnen wir irgend einen jener 16 Punkte, den Coefficienten a, b entsprechend, durch (a, b), so liegen offenbar, weil die entsprechenden u zusammen congruent 0 sind, (a, b), $(a+2, b)$, $(a, b+2)$, $(a+2, b+2)$ in einer Ebene. Ferner ist auch mit 0 congruent die Summe irgend zweier der solchen vier Punkten angehörigen Integrale, multiplicirt mit 2. Man hat daher die Sätze:

Die 16 Berührungspunkte der Wendungsberührebenen theilen sich in vier Gruppen zu vier. Je vier Punkte derselben Gruppe liegen in einer Ebene; und die Tangenten je zweier Punkte derselben Gruppe liegen gleichfalls in einer Ebene, so dass solche vier Tangenten sich in demselben Punkte schneiden.

Bekanntlich sind jene vier Ebenen die des beiden Flächen gemeinsamen Polartetraeders, und die letzterwähnten Punkte sind die Ecken desselben.

§. 18.

Raumcurven sechster Ordnung.

Die Theorie der Curven sechster Ordnung, welche der vollständige Durchschnitt von Flächen zweiter und dritter Ordnung sind, knüpft sich wesentlich an die Theorie der dreifach berührenden Ebenen, welche für sie fast ganz dieselbe Rolle spielen, wie die Doppeltangenten für die ebenen Curven vierter Ordnung. Man hat für diese Curven $p = 4$; die Bedingungen also dafür, dass 6 Punkte der Curve in einer Ebene liegen, sind enthalten in den Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \cdots + u_1^{(6)} &\equiv 0, \\ u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \cdots + u_2^{(6)} &\equiv 0, \\ u_3^{(1)} + u_3^{(2)} + \cdots + u_3^{(6)} &\equiv 0, \\ u_4^{(1)} + u_4^{(2)} + \cdots + u_4^{(6)} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Dreifach berührende Ebenen erhält man, wenn dreimal zwei Systeme der u zusammenfallen, wenn also

$$u_k' + u_k'' + u_k''' \equiv \frac{A_k}{2}.$$

Der Schluss des §. 16 führt dann sofort auf folgende Sätze:

Es giebt 120 Ebenen, welche eine Raumcurve sechster Ordnung in drei verschiedenen Punkten berühren.

Legt man durch irgend drei Berührungspunkte einer solchen Ebene eine Fläche h^{ter} Ordnung, so schneidet sie die Curve noch in $6h-3$ Punkten, in welchen dieselbe von einer Fläche $(2h-1)^{ter}$ Ordnung zweipunktig berührt werden kann. Man erhält so 120 Systeme von Berührungsflächen $(2h-1)^{ter}$ Ordnung. Es giebt deren noch 136 andere, deren Berührungspunkte nie auf einer Fläche h^{ter} Ordnung liegen. Aber alle 256 Systeme haben die gemeinsame Eigenschaft, dass die Berührungspunkte je zweier Flächen desselben Systems auf einer Fläche $(2h-1)^{ter}$ Ordnung liegen.

Ferner:

Es giebt 255 Systeme von Flächen zweiter Ordnung, welche die Curve sechster Ordnung in 6 verschiedenen Punkten berühren; die Berührungspunkte je zweier Flächen desselben Systems liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung.

In jedem dieser Systeme kommen 28 Flächen vor, welche in Paare dreifach berührender Ebenen zerfallen. Die 12 Berührungspunkte je zweier solcher Paare liegen auf einer Flächenschaar zweiter Ordnung, d. h. auf einer Raumcurve vierter Ordnung.

Solcher Raumcurven vierter Ordnung giebt es hienach $\frac{255.28.27}{2}$. Aber da ein System von vier Ebenen auf drei Arten in zwei Paare getheilt werden kann, so ist dabei jede Curve vierter Ordnung dreimal gerechnet. *Die wirkliche Zahl dieser Curven vierter Ordnung ist daher* $\frac{255.28.27}{2.3} = 32130$.

Da sämmtliche 360 Berührungspunkte auf mehrfache Weise so unter 30 Flächen zweiter Ordnung (Raumcurven vierter Ordnung) vertheilt werden können, dass kein Punkt auf mehreren Flächen liegt, *so liegen alle 360 Berührungspunkte auf einer Flächenschaar der sechszigsten Ordnung, und sind der vollständige Durchschnitt derselben mit der Curve sechster Ordnung.*

Damit 12 Punkte der Curve sechster Ordnung auf einer Flächenschaar zweiter Ordnung, oder auf einer Raumcurve vierter Ordnung liegen, müssen

die Gleichungen

$$u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + \cdots + u_k^{(12)} \equiv 0$$

erfüllt sein. Lässt man viermal drei Punkte zusammenfallen, so ergeben sich die verschieden gebliebenen Integrale aus Gleichungen der Form

$$u_k + u_k' + u_k'' + u_k''' \equiv \frac{A_k}{3},$$

wonach sich die Punkte jedesmal mittelst einer Gleichung vierten Grades bestimmen. Man hat also den Satz:

Es giebt $3^8 = 6561$ Raumcurven vierter Ordnung, welche die Raumcurve sechster Ordnung in vier verschiedenen Punkten dreipunktig berühren.

Und:

Legt man durch die Berührungspunkte zweier solcher Curven eine Fläche zweiter Ordnung, so schneidet sie die Curve sechster Ordnung noch in den Berührungspunkten einer dritten Berührungscurve.

§. 19.

Erweiterung eines *Steiner*schen Problems.

Im Vorigen sind ausschliesslich Berührungsaufgaben behandelt, und gezeigt, wie die Lösung derselben mit Hülfe der *Abel*schen Functionen sich aufs Einfachste darstellt. Ich werde jetzt noch ein anderes sehr allgemeines Problem untersuchen; ein Problem, dessen speciellster Fall von *Steiner* behandelt ist, und von welchem ich p. 94 u. folgg. dieses Bandes eine analytische Lösung gegeben habe, welche sich im Wesentlichen gleichfalls auf die hier auseinander gesetzten Principien stützt. Dieses allgemeine Problem lautet folgendermassen:

Gegeben sind r Gruppen von je $mnk-pf$ Punkten einer Curve $m n^{ter}$ Ordnung ($k \geqq m+n-3$); gesucht r Systeme von je p Punkten auf derselben, in folgender Art. Eine Fläche k^{ter} Ordnung soll durch die Punkte der ersten Gruppe und die ersten $f-1$ Systeme gehen; sie ist dadurch vollständig bestimmt, und ihre übrigen Schnittpunkte mit der Curve bilden das f^{te} System. Eine zweite Fläche k^{ter} Ordnung soll durch die zweite Gruppe und durch das 2te, 3te, ... f^{te} System gehen; sie bestimmt das $f+1^{te}$ System. Auf diese Weise soll man fortfahren, so dass der Reihe nach r Flächen k^{ter} Ordnung gebildet werden, und dass die Reihe der Systeme sich schliesst, indem nach dem r^{ten} System kein neues mehr erzeugt wird, sondern wieder das erste, nach diesem das zweite, u. s. w.

Man erhält die entsprechende Aufgabe für die Ebene, indem man nur $n = 1$ setzt.

Bezeichnen wir die den Gruppen entsprechenden Integralsummen durch w_k, die den Systemen entsprechenden durch v_k, indem wir die verschiedenen Gruppen und Systeme durch obere Indices unterscheiden. Der Ansatz des Problems ist dann in folgenden Gleichungen enthalten:

$$(1.)\qquad \begin{cases} v_k^{(1)} + v_k^{(2)} + \cdots + v_k^{(f)} \equiv -w_k^{(1)}, \\ v_k^{(2)} + v_k^{(3)} + \cdots + v_k^{(f+1)} \equiv -w_k^{(2)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_k^{(r)} + v_k^{(1)} + \cdots + v_k^{(f-1)} \equiv -w_k^{(r)}. \end{cases}$$

Um die Lösung dieser für die v linearen Gleichungen zu erleichtern, werde ich unter $v_k^{(h)}$ auch dann noch eine Grösse v_k verstehen, wenn der Index h den Werth r überschreitet; und zwar soll $v_k^{(h)}$ dann dasjenige v bedeuten, dessen oberer Index bei der Division von h durch r als Rest bleibt. Aus den obigen Gleichungen leiten sich dann zunächst folgende ab, in denen h einen beliebigen Index bedeutet:

$$w_k^{(h+1)} - w_k^{(h)} \equiv v_k^{(h)} - v_k^{(f+h)};$$

daher auch:

$$(2.)\qquad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=s-1} \{ w_k^{(h+1+\lambda f)} - w_k^{(h+\lambda f)} \} \equiv v_k^{(h)} - v_k^{(h+sf)}.$$

Nun bemerkt man, dass zwei Fälle unterschieden werden müssen. Sind nämlich f und r nicht relative Primzahlen, also etwa

$$f = g.f', \qquad r = g.r',$$

wo f', r' relative Primzahlen sind, so steht auf der rechten Seite Null, sobald man $s = r'$ macht. Man wird dann also auf Bedingungen zwischen den v geführt, und kann folgenden Satz aussprechen:

Sind f, r nicht relative Primzahlen, sondern ist $f = gf'$, $r = gr'$, wo f', r' relative Primzahlen sind, so ist die obige Aufgabe nur möglich, wenn die $p(g-1)$ Bedingungen erfüllt werden:

$$(3.)\qquad \begin{cases} w_k^{(1)} + w_k^{(f+1)} + \cdots + w_k^{((r'-1)f+1)} \\ \equiv w_k^{(2)} + w_k^{(f+2)} + \cdots + w_k^{((r'-1)f+2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \equiv w_k^{(g)} + w_k^{(f+g)} + \cdots + w_k^{((r'-1)f+g)}; \end{cases}$$

und wenn diese Gleichungen erfüllt sind, so gestattet die Aufgabe unendlich viele Lösungen, indem die ersten $f-1$ Systeme ganz willkürlich gewählt werden können.

Sind dagegen f, r relative Primzahlen, so kann man mittelst der Gleichung (2.) alle v_k durch irgend eines derselben ausdrücken, und erhält:

$$(4.) \qquad v_k^{(h+sf)} \equiv v_k^{(h)} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=s-1} \{w_k^{(h+\lambda f)} - w_k^{(h+1+\lambda f)}\}.$$

Addiren wir nun sämmtliche Gleichungen (1.), so findet sich

$$f\Sigma v_k \equiv -\Sigma w_k,$$

oder, wenn $\Sigma w_k = z_k$ gesetzt wird, und man bemerkt, dass sämmtliche v_k nach (4.) dasselbe Submultiplum der Perioden, ihre Summe also das r-fache eines solchen enthalten muss:

$$v_k^{(1)} + v_k^{(2)} + \cdots + v_k^{(r)} \equiv -\frac{z_k}{f} + \frac{rA_k}{f}.$$

Setzen wir in diese Gleichung die oben in (4.) erhaltenen Werthe der v ein, so kommt:

$$rv_k^{(h)} + \sum_{s=1}^{s=r-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=s-1} (w_k^{(h+\lambda f)} - w_k^{(h+1+\lambda f)}) \equiv -\frac{z_k}{f} + \frac{rA_k}{f}$$

$$\equiv rv_k^{(h)} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r-2} (r-\lambda-1)(w_k^{(h+\lambda f)} - w_k^{(h+1+\lambda f)}).$$

Führt man also endlich die Bezeichnung ein:

$$(5.) \qquad z_k^{(h)} = (r-1)w_k^{(h)} + (r-2)w_k^{(h+f)} + \cdots + 1 \,.\, w_k^{(h+(r-2)f)},$$

so ergiebt sich:

$$(6.) \qquad v_k^{(h)} \equiv -\frac{z_k}{rf} + \frac{z_k^{(h+1)} - z_k^{(h)}}{r} + \frac{A_k}{f}.$$

Durch diese Formel ist die Lösung der Aufgabe vollständig gegeben, da man aus den gefundenen Werthen der v die Punkte der Systeme mittelst Gleichungen p^{ten} Grades berechnet. Da in den A die Zahlen m, q alle Werthe von 0 bis $f-1$ erhalten dürfen, so erhält man das Resultat:

Wenn f, r relative Primzahlen sind, so ist die Aufgabe auf f^{2p} Arten lösbar.

Diese Aufgabe hat *Steiner* a. a. O. nicht behandelt; wohl aber bei ebenen Curven dritter Ordnung ($p=1$) einen besonderen Fall des oben als unbestimmt erkannten Problems. Man kann nämlich festsetzen, dass die $r = gr'$ Gruppen nicht sämmtlich verschieden sein sollen, sondern dass nur g

verschiedene Gruppen existiren, welche r'mal hinter einander in derselben Reihenfolge benutzt werden. Man kann ferner festsetzen, dass die Anzahl der Punkte jeder Gruppe gleich p sei, wie in den Systemen, dass also

$$mnk = p(f+1).$$

Aehnlich wie in §. 16 ergiebt sich dann

$$k = \frac{p}{2}\cdot s, \qquad f = \frac{mn}{2}\cdot s - 1,$$

wenn eine der Zahlen m, n von der Form $4h+2$, die andere ungerade ist; und

$$k = ps, \qquad f = mns - 1$$

in jedem anderen Falle. Die Gleichungen (3.) gehen dann über in:

$$r' . w_k^{(1)} \equiv r' . w_k^{(2)} \ldots \equiv r' . w_k^{(g)},$$

und wenn also die erste Gruppe beliebig angenommen wird, so bestimmen sich die Punkte der übrigen Gruppen den Gleichungen

$$w_k^{(2)} \equiv w_k^{(1)} + \frac{A_k}{r'},$$

$$w_k^{(3)} \equiv w_k^{(1)} + \frac{A_k'}{r'},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$w_k^{(g)} \equiv w_k^{(1)} + \frac{A_k^{(g-2)}}{r'}$$

entsprechend durch ebensoviel Gleichungen p^{ten} Grades. In diesen Gleichungen können den in den A vorkommenden Zahlen m, q die Werthe 0, 1, ... $r'-1$ beigelegt werden; doch so, dass niemals zwei Systeme der A mit ungleichen oberen Indices gleich werden. Die Anzahl aller möglichen, zu einer gegebenen gehörigen Reihen von Gruppen ist also:

$$\frac{r'^{2p}-1 \,.\, r'^{2p}-2 \ldots r'^{2p}-(g-1)}{1.2\ldots(g-1)}.$$

Unter diesen Lösungen der Aufgaben sind aber, wenn r' keine Primzahl ist, auch solche enthalten, bei denen der Kreis von Flächen sich früher als nach r'maliger Benutzung aller Gruppen schliesst, und welche daher für das vorliegende Problem nur insofern mitzählen, als die dabei gebildete Reihe von Flächen mehrfach gerechnet wird.

Dieses ist die unmittelbare Erweiterung des angeführten *Steiner*schen Problems, welches, wie man sieht, für alle ebenen und doppelt gekrümmten Curven eintritt, und in allen Fällen nach den hier entwickelten Principien mit

Leichtigkeit gelöst wird. Auch für die gegenseitige Lage der aus den einzelnen Lösungen erhaltenen Punktgruppen existiren ähnliche Sätze, wie ich sie bezüglich des ursprünglichen *Steiner*schen Problems in der angeführten Abhandlung entwickelt habe. Ein genaueres Eingehen in diese Verhältnisse würde hier zu weit führen; auch scheint es, als ob bei so allgemeinen Problemen vorzüglich die Einsicht von Interesse ist, dass ihre Lösung in einer bestimmten Weise aus gegebenen Principien abgeleitet werden könne, weniger aber die Entwicklung der dabei eintretenden Umstände, welche der Natur der Sache nach nicht anders als weitläufig sein kann, wenn sie einigermassen erschöpfend sein soll. —

Ich benutze diese Gelegenheit, um eine Bemerkung bezüglich meiner Abhandlung „über eine Classe von Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen" (Bd. 62, p. 232 dieses Journals) nachzutragen. Gleichungen der betrachteten Art sind bereits früher von *Hermite* in den Comptes Rendus der Pariser Akademie, 1855, zweites Semester, untersucht worden, wo sich die Eigenschaft derselben, nur reelle Wurzeln zu besitzen, angegeben findet.

Giessen, den 28. October 1863.

Note sur la transformation de la cubique ternaire en sa forme canonique.

(Par M. *William Spottiswoode* à Londres.)

En effectuant cette transformation bien connue, on fait usage ordinairement de sa forme canonique elle même et de son Hessien pour éviter les expressions plus longues qu'on trouve en suivant la méthode directe. Je me propose içi d'indiquer une route par laquelle en partant de la transformation directe on retrouve l'équation biquadratique de *Hesse* et de *Aronhold* pour déterminer le coefficient du produit des variables dans la forme canonique.

En effet en posant

$$(1.)\quad U = ax^3+by^3+cz^3+3(fy^2z+f_1yz^2+gz^2x+g_1zx^2+hx^2y+h_1xy^2)+6kxyz$$

on peut écrire pour U, pour les dérivées partielles du premier ordre de U et pour son Hessien les expressions abrégées:

$$(2.)\quad \begin{cases} U = (a,\ b,\ \ldots)(x,y,z)^3, \\ \frac{1}{3}\frac{\partial U}{dx} = (a,\ h_1,\ldots)(x,y,z)^2, \\ \frac{1}{3}\frac{\partial U}{\partial y} = (h,\ b,\ \ldots)(x,y,z)^2, \\ \frac{1}{3}\frac{\partial U}{dz} = (g_1,f,\ \ldots)(x,y,z)^2, \\ \frac{1}{6^3}H(U) = (\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \ldots)(x,y,z)^3. \end{cases}$$

Puis en introduisant de nouvelles variables par les formules de transformation linéaire

$$(3.)\quad \begin{cases} x = \alpha\ \xi+\beta\ \eta+\gamma\ \zeta, \\ y = \alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta, \\ z = \alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2\zeta, \end{cases} \qquad \nabla = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

on a pour la transformée de U

$$\begin{aligned} (a,b,\ldots)(x,y,z)^3 = {} & (a,b,\ldots)(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)^3\xi^3+\cdots \\ & +3(a,b,\ldots)(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)^2(\beta,\beta_1,\beta_2)\xi^2\eta+\cdots \\ & +6(a,b,\ldots)(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\ (\beta,\beta_1,\beta_2)(\gamma,\gamma_1,\gamma_2)\xi\eta\zeta \end{aligned}$$

et les conditions qui doivent être remplies pour que l'expression en ξ, η, ζ soit une forme canonique sont contenues dans les équations

$$(4.) \quad (a, b, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)^2(\gamma, \gamma_1, \gamma_2) = 0,$$

$$(5.) \quad (a, b, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)\,(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)^2 = 0,$$

$$(6.) \quad (a, b, \ldots)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)^2(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) = 0,$$

$$(7.) \quad (a, b, \ldots)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)\,(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 = 0,$$

$$(8.) \quad (a, b, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2(\beta, \beta_1, \beta_2) = 0,$$

$$(9.) \quad (a, b, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)\,(\beta, \beta_1, \beta_2)^2 = 0,$$

$$(10.) \quad (a, b, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^3 = (a, b, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)^3 = (a, b, \ldots)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)^3 = 1.$$

En écrivant

$$(11.) \quad (a, b, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)(\beta, \beta_1, \beta_2)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2) = K$$

on déduit de (4.) et (5.)

$$(a,\ h, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{K}{\nabla}(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1),$$

$$(h_1, b, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{K}{\nabla}(\beta_2\gamma - \beta\,\gamma_2),$$

$$(g_1, f, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{K}{\nabla}(\beta\,\gamma_1 - \beta_1\gamma),$$

d'où, en éliminant γ, γ_1, γ_2, on trouve

$$\begin{vmatrix} a\beta + h\beta_1 + g_1\beta_2, & h\beta + h_1\beta_1 + \left(k + \frac{K}{\nabla}\right)\beta_2, & g_1\beta + \left(k - \frac{K}{\nabla}\right)\beta_1 + g\beta_2 \\ h\beta + h_1\beta_1 + \left(k - \frac{K}{\nabla}\right)\beta_2, & h_1\beta + b\,\beta_1 + f\beta_2, & \left(k + \frac{K}{\nabla}\right)\beta + f\beta_1 + f_1\beta_2 \\ g_1\beta + \left(k + \frac{K}{\nabla}\right)\beta_1 + g\beta_2, & \left(k - \frac{K}{\nabla}\right)\beta + f\beta_1 + f_1\beta_2, & g\beta + f\beta_1 + c\beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant cette dernière équation on peut la présenter sous la forme suivante

$$(a, b, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)^3\left(\frac{K}{\nabla}\right)^2 = (\mathrm{a}, \mathrm{b}, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)^3,$$

que je désigne par la notation abrégée $B\left(\frac{K}{\nabla}\right)^2 = \mathrm{B}$. On obtient deux équations semblables dans lesquelles les coëfficients β, β_1, β_2 sont remplacés par α, α_1, α_2 et par γ, γ_1, γ_2. Je réunis ces résultats et je les écris sous la forme abrégée du système

$$(12.) \quad A\left(\frac{K}{\nabla}\right)^2 = \mathrm{A}, \quad B\left(\frac{K}{\nabla}\right)^2 = \mathrm{B}, \quad C\left(\frac{K}{\nabla}\right)^2 = \mathrm{C}.$$

En opérant sur les deux côtés de ces équations avec les facteurs

$$\left(\beta\frac{\partial}{\partial\gamma}+\beta_1\frac{\partial}{\partial\gamma_1}+\beta_2\frac{\partial}{\partial\gamma_2}\right)=\left(\beta\frac{\partial}{\partial\gamma}+\cdots\right)\text{ etc.}$$

on trouve, en vertu de (4.) ... (9.), les six équations suivantes

$$\left(\beta\frac{\partial}{\partial\gamma}+\cdots\right)\mathrm{C}=0,\quad \left(\gamma\frac{\partial}{\partial\beta}+\cdots\right)\mathrm{B}=0,$$

$$\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}+\cdots\right)\mathrm{A}=0,\quad \left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma}+\cdots\right)\mathrm{C}=0,$$

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}+\cdots\right)\mathrm{B}=0,\quad \left(\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}+\cdots\right)\mathrm{A}=0,$$

c'est-à-dire un système que l'on déduit de (4.) ... (9.) en écrivant a, b, ... au lieu de $a, b, \ldots$. Je désigne ce système par les numéros (4.)'... (9.)'.

En éliminant d'un côté entre (7.) et (8.), et de l'autre entre (7.)' et (8.)' on trouve les relations

$$\begin{aligned}&(a, h_1, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 : (h, b, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 : (g_1, f, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2\\ =\ &(\mathrm{a}, \mathrm{h}_1, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 : (\mathrm{h}, \mathrm{b}, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 : (\mathrm{g}_1, \mathrm{f}, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2\\ =\ &\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1 \quad : \quad \beta_2\gamma-\beta\gamma_2 \quad : \quad \beta\gamma_1-\beta_1\gamma.\end{aligned}$$

Au moyen d'une nouvelle indéterminée $\frac{1}{6}\lambda$ que l'on introduit, ces proportions peuvent être remplaçées par les équations

$$(13.)\quad \begin{cases}\lambda(a, h_1, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 = 6(\mathrm{a}, \mathrm{h}_1, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2,\\ \lambda(h, b, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 = 6(\mathrm{h}, \mathrm{b}, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2,\\ \lambda(g_1, f, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 = 6(\mathrm{g}_1, \mathrm{f}, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2.\end{cases}$$

Par conséquent on trouvera les valeurs de la quantité λ, en égalant à zéro le discriminant de la forme

$$(\lambda a-6\mathrm{a}, \lambda b-6\mathrm{b}, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^3.$$

Mais (Voyez A third Memoir on Quantics, by *A. Cayley*, Philosophical transactions, Vol. 146, p. 645) ce discriminant est

$$=(\lambda^4-24S\lambda^2+8T\lambda-48S^2)^2R,$$

R désignant le discriminant de U; de sorte que λ se détermine par l'équation

$$(14.)\quad \lambda^4-24S\lambda^2+8T\lambda-48S^2=0.$$

Il n'est pas nécessaire de suivre plus loin la solution bien connue du problème parce qu'en retombant sur l'équation (14.) on a mis en évidence le rapport entre les conditions (4.) ... (9.) et la biquadratique d'*Aronhold*.

Londres, décembre 1863.

Transformations-Formeln für rechtwinklige Raum-Coordinaten.

(Von Herrn *O. Hesse* zu Heidelberg.)

Das Problem der Transformation rechtwinkliger Raum-Coordinaten, rein analytisch gefasst, besteht bekanntlich darin:

„Die Substitutionen zu bestimmen von der Form:

$$(1.)\qquad \begin{cases} X = ax + by + cz, \\ Y = a'x + b'y + c'z, \\ Z = a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

„welche folgende Gleichung zu einer identischen machen

$$(2.)\qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Diese durch die Substitutionen (1.) identische Gleichung (2.) löset sich in folgende Bedingungsgleichungen zwischen den neun Substitutions-Coefficienten auf:

$$(3.)\qquad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, & ca + c'a' + c''a'' = 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, & ab + a'b' + a''b'' = 0, \end{cases}$$

und das Problem verlangt die wirkliche Auflösung dieser sechs Gleichungen.

Da nämlich die neun Substitutions-Coefficienten diesen sechs Gleichungen zu genügen haben, so sieht man, dass man irgend drei von jenen Coefficienten als unabhängige Variable wählen kann, und dass alle neun Coefficienten als Functionen der drei Variabeln bestimmt sind.

Monge stellt alle neun Substitutions-Coefficienten als Functionen der drei Variabeln a, b', c'' dar *). *Euler* drückt sie durch drei andere Variabeln aus, die von mehr praktischer Bedeutung sind **).

Die drei Variabeln von *Monge* oder *Euler* in den Functionen, welche die neun Substitutions-Coefficienten ausdrücken, kann man vermittelst Substitutionen ersetzen durch drei oder mehrere unabhängige Variabele. Das Criterium für die neun Functionen bleiben die sechs Gleichungen (3.).

---

*) Mémoire de l'académie des sciences de Paris, année 1784, p. 114.

**) Introductio in analysin infinitorum, tom. II, p. 369.

Das Studium des Hexagramma mysticum von *Pascal* in seiner analytischen Auffassung führt zu folgender Darstellung der neun Substitutions-Coefficienten als Functionen von sechs unabhängigen Variabeln λ:

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_6$ irgend welche sechs variable Grössen, es seien ferner:

$$(4.)\quad \begin{cases} \pi_1 = (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots(\lambda_1-\lambda_6), \\ \pi_2 = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\ldots(\lambda_2-\lambda_6), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \pi_6 = (\lambda_6-\lambda_1)(\lambda_6-\lambda_2)\ldots(\lambda_6-\lambda_5), \end{cases}$$

und $i = \sqrt{-1}$. Alsdann hat man die Ausdrücke für die neun Substitutions-Coefficienten:

$$(5.)\quad \begin{cases} a = \dfrac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)}\cdot\dfrac{i\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_2}}, & b = \dfrac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_5)}\cdot\dfrac{i\sqrt{\pi_3}}{\sqrt{\pi_2}}, \\ a' = \dfrac{(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)}\cdot\dfrac{i\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_4}}, & b' = \dfrac{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_5)}\cdot\dfrac{i\sqrt{\pi_3}}{\sqrt{\pi_4}}, \\ a'' = \dfrac{(\lambda_6-\lambda_3)(\lambda_6-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)}\cdot\dfrac{i\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_6}}, & b'' = \dfrac{(\lambda_6-\lambda_1)(\lambda_6-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_5)}\cdot\dfrac{i\sqrt{\pi_3}}{\sqrt{\pi_6}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = \dfrac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)}\cdot\dfrac{i\sqrt{\pi_5}}{\sqrt{\pi_2}}, \\ c' = \dfrac{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)}\cdot\dfrac{i\sqrt{\pi_5}}{\sqrt{\pi_4}}, \\ c'' = \dfrac{(\lambda_6-\lambda_1)(\lambda_6-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)}\cdot\dfrac{i\sqrt{\pi_5}}{\sqrt{\pi_6}}. \end{cases}$$

Das Criterium für diese neun Functionen sind die Gleichungen (3.). Es wird also nachzuweisen sein, dass die Functionen (5.) jenen sechs Gleichungen (3.) genügen.

Dazu dient die bekannte identische Gleichung aus der Algebra:

$$(6.)\quad \frac{\varphi(\lambda_1)}{\pi_1}+\frac{\varphi(\lambda_2)}{\pi_2}+\cdots+\frac{\varphi(\lambda_6)}{\pi_6} = 0,$$

in welcher $\varphi(\lambda)$ irgend eine ganze Function von λ des vierten Grades bedeutet.

Aus dieser Gleichung gehen nämlich, wenn wir für $\varphi(\lambda)$ nach einander setzen:

$$(\lambda-\lambda_3)^2(\lambda-\lambda_5)^2, \quad (\lambda-\lambda_5)^2(\lambda-\lambda_1)^2, \quad (\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_3)^2,$$

drei identische Gleichungen hervor, die wir auch erhalten, wenn wir für die neun Coefficienten in den drei ersten Gleichungen (3.) ihre Ausdrücke (5.) setzen.

Setzen wir für $\varphi(\lambda)$ nach einander:

$(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_5)$, $(\lambda-\lambda_3)^2(\lambda-\lambda_5)(\lambda-\lambda_1)$, $(\lambda-\lambda_5)^2(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3)$,

so geht die identische Gleichung (6.) über in drei identische Gleichungen, die wir auch erhalten, wenn wir in den drei letzten Gleichungen (3.) die Ausdrücke (5.) der Coefficienten setzen.

Die Ausdrücke (5.) der neun Substitutionscoefficienten sind in der That die Auflösungen der sechs Gleichungen (3.). Die sechs Variabeln λ in ihnen können nur die Wirkung von drei Variabeln ausüben, weil die neun Functionen (5.) den sechs Gleichungen (3.) genügen. Wir werden dieses auch direct nachweisen können.

Zu dem genannten Zwecke bemerken wir, dass die Ausdrücke (5.) der neun Coefficienten ungeändert bleiben, wenn man erstens für alle λ_k setzt $\alpha\lambda_k$, zweitens für alle λ_k setzt $\lambda_k+\beta$ und drittens für alle λ_k setzt $\frac{1}{\lambda_k}$. Wenn wir diese Substitutionen in eine vereinigen, so können wir kürzer sagen: die neun Functionen (5.) der sechs Variabeln λ_k werden dieselben Functionen der sechs Variabeln μ_k, wenn man setzt:

$$(7.) \qquad \lambda_k = \frac{\alpha\mu_k+\beta}{\mu_k+\gamma},$$

also unabhängig von α, β, γ, wovon man sich auch direct leicht überzeugen kann.

Daraus ziehen wir den Schluss, dass, wenn man in den oben angegebenen Ausdrücken (5.) der neun Coefficienten irgend welchen drei Variabeln λ gegebene Werthe zuertheilt, die drei anderen aber beliebig variiren lässt, die neun Coefficienten alle Werthe annehmen, welche sie durch Variation sämmtlicher Variabeln λ erhalten würden.

Denn es sei C der Ausdruck irgend eines der neun Coefficienten und (C) der Ausdruck, in welchen C durch die Substitutionen (7.) übergeht. Es ist (C) also dieselbe Function der sechs Variabeln μ_k als C der Variabeln λ_k, welche Werthe auch α, β, γ haben. Haben nun die sechs Variabeln λ_k irgend welche Werthe, so kann man, da es freisteht über die Constanten α, β, γ beliebig zu verfügen, denselben solche Werthe zuertheilen, dass drei von den sechs Variabeln μ_k auf Grund der sechs Gleichungen (7.) gegebene Werthe erhalten. Da aber $C=(C)$ ist, so haben wir auf der einen Seite irgend welche Werthe der Variabeln, auf der anderen Seite gegebene Werthe von drei Variabeln.

Was die Vorzeichen der sechs Quadratwurzeln $\sqrt{\pi_1}$, $\sqrt{\pi_2}$, ... $\sqrt{\pi_6}$ anbetrifft, welche in die gegebenen Ausdrücke der neun Coefficienten eingehen,

so können dieselben ganz willkührlich genommen werden. Bemerken wir aber, dass sämmtliche Variationen, die in den Substitutionen (1.) durch die Veränderungen der Vorzeichen der sechs Quadratwurzelgrössen hervorgehen, auch dadurch zu Wege gebracht werden können, dass man einer oder mehreren der sechs Variablen die entgegengesetzten Vorzeichen zuertheilt, so können wir von diesen Variationen absehen und annehmen, dass sämmtliche Quadratwurzelgrössen das positive Vorzeichen haben.

Eine gefälligere Form nehmen die Ausdrücke (5.) für die neun Coefficienten der Substitution an, wenn man für die sechs Grössen π ihre Werthe (4.) setzt. Man erhält dadurch:

$$(8.)\quad \begin{cases} a = \sqrt{\left\{\frac{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_6)}{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_6)}\cdot\frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)}\right\}}, \\ a' = \sqrt{\left\{\frac{(\lambda_1-\lambda_6)(\lambda_1-\lambda_2)}{(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_2)}\cdot\frac{(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)}\right\}}, \\ a'' = \sqrt{\left\{\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_4)}{(\lambda_6-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_4)}\cdot\frac{(\lambda_6-\lambda_3)(\lambda_6-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)}\right\}}, \\ b = \sqrt{\left\{\frac{(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_6)}{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_6)}\cdot\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_5)}\right\}}, \\ b' = \sqrt{\left\{\frac{(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_3-\lambda_2)}{(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_2)}\cdot\frac{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_5)}\right\}}, \\ b'' = \sqrt{\left\{\frac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_6-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_4)}\cdot\frac{(\lambda_6-\lambda_1)(\lambda_6-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_5)}\right\}}, \\ c = \sqrt{\left\{\frac{(\lambda_5-\lambda_4)(\lambda_5-\lambda_6)}{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_6)}\cdot\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)}\right\}}, \\ c' = \sqrt{\left\{\frac{(\lambda_5-\lambda_6)(\lambda_5-\lambda_2)}{(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_2)}\cdot\frac{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)}\right\}}, \\ c'' = \sqrt{\left\{\frac{(\lambda_5-\lambda_2)(\lambda_5-\lambda_4)}{(\lambda_6-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_4)}\cdot\frac{(\lambda_6-\lambda_1)(\lambda_6-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)}\right\}}. \end{cases}$$

Hier ist es allerdings unerlässlich das Vorzeichen zu bestimmen, welches jeder der neun Quadratwurzeln zukommt. Wir haben in dieser Absicht jeden unter dem Quadratwurzelzeichen stehenden Bruch als das Product zweier Brüche dargestellt. Der zweite Bruch ist der nämliche, welcher in (5.) das Vorzeichen der Substitutionscoefficienten bestimmt. Wir haben deshalb jedem Quadratwurzelzeichen in (8.) das positive oder negative Zeichen vorzusetzen, je nach dem die Brüche unter demselben beide einen positiven oder beide einen negativen Werth haben. Hat der eine Bruch einen positiven, der andere

einen negativen Werth — solche Fälle giebt es — so werden gewisse Substitutionscoefficienten imaginär und es tritt eine gewisse Unsicherheit in den Formeln (8.) ein, die in den vorhergehenden Formeln (5.) nicht aufkommt.

Wir wollen nicht unterlassen darauf aufmerksam zu machen, dass unter den Quadratwurzelzeichen in (8.) Quotienten von solchen Producten stehen, deren Differenzen nach den bei Gelegenheit der Involution angestellten Betrachtungen (S. p. 180 dieses Bandes) mannigfacher Umgestaltung fähig sind.

Heidelberg, im Januar 1864.

Ueber ein bestimmtes Integral.

(Von Herrn *L. Oettinger* zu Freiburg im Breisgau.)

In den folgenden Zeilen soll das bestimmte Integral

$$\int \sin x^m \cos x^n \, dx$$

betrachtet werden, in welchem m und n positive ganze Zahlen (mit Einschluss der Null) bedeuten und dessen Grenzen positive oder negative Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ seien. Dies Integral lässt sich immer unmittelbar hinschreiben, wenn man die beiden Integrale

$$(1.) \qquad J_0^{(r)} = \int_0^{\frac{r\pi}{2}} \sin x^m \cos x^n \, dx, \quad J_{-r}^{(0)} = \int_{-\frac{r\pi}{2}}^{0} \sin x^m \cos x^n \, dx$$

für jeden Werth der ganzen Zahl r kennt, da unter allen Umständen durch Addition respective Subtraction von nur zweien solcher Integrale das Integral

$$\int_{\frac{p\pi}{2}}^{\frac{q\pi}{2}} \sin x^m \cos x^n \, dx$$

gefunden wird, mögen p und q positive oder negative ganze Zahlen sein. Von den beiden Integralen (1.) reducirt sich überdies das zweite auf das erste durch die Formel

$$J_{-r}^{(0)} = (-1)^m J_0^{(r)},$$

welche sich durch Einführung einer neuen Variablen für $-x$ ergiebt. Es kommt also nur auf die Bestimmung von $J_0^{(r)}$ an und diese wird weiter auf die Kenntniss des Integrals $J_0^{(1)} = J$, also des Integrals

$$(2.) \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^m \cos x^n \, dx$$

durch folgende Betrachtungen zurückgeführt.

Bezeichnet man die von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, von $\frac{\pi}{2}$ bis π, von π bis $\frac{3\pi}{2}$, von $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π etc. genommenen Integrale mit J, J_1, J_2, J_3 etc., so dass allgemein

$$(3.) \qquad J_p = \int_{\frac{p\pi}{2}}^{(p+1)\frac{\pi}{2}} \sin x^m \cos x^n \, dx$$

ist, so erhält man durch Einführung einer neuen Variablen für $\pi-x$, $\pi+x$, $2\pi-x$ sowie für $2\pi+x$ die Formeln

$$(4.) \qquad J_1=(-1)^n J, \quad J_2=(-1)^{m+n}J, \quad J_3=(-1)^m J, \quad J_4=J, \quad J_5=J_1, \quad \text{etc.}$$

Hieraus folgt

$$\int_0^{2\pi} \sin x^m \cos x^n \, dx = J+J_1+J_2+J_3 = (1+(-1)^m)(1+(-1)^n)J$$

$$\text{d. h.} \quad = 4J, \text{ wenn } m \text{ und } n \text{ gerade},$$
$$= 0 \text{ in allen anderen Fällen.}$$

Ist nun ϱ der Rest von r bei der Theilung durch 4, also

$$r = 4k+\varrho,$$

so ist demnach

$$J_0^{(r)} = 4kJ+J_0^{(\varrho)}, \quad \text{wenn } m \text{ und } n \text{ gerade}$$
$$= J_0^{(\varrho)} \quad \text{in allen anderen Fällen.}$$

Demzufolge bedarf es nur der Werthe von $J_0^{(r)}$ für $r=0, 1, 2, 3$ um sie für jedes r zu kennen. Diese Werthe sind aber nach (4.) die folgenden:

m	n	$J_0^{(0)}$	$J_0^{(1)}$	$J_0^{(2)}$	$J_0^{(3)}$
gerade	gerade	0	J	$2J$	$3J$
gerade	ungerade	0	J	0	$-J$
ungerade	gerade	0	J	$2J$	J
ungerade	ungerade	0	J	0	J

woraus man für $J_0^{(r)}$ vier den eben bezeichneten vier Fällen entsprechende und für jedes positive ganze r geltende Formeln erhält, nämlich:

$$(5.) \quad \begin{cases} \text{wenn } m \text{ gerade, } n \text{ gerade,} & J_0^{(r)} = rJ, \\ \text{wenn } m \text{ gerade, } n \text{ ungerade,} & J_0^{(r)} = \dfrac{1-(-1)^r}{2}\cdot(-1)^{\frac{r-1.r-2}{2}}J, \\ \text{wenn } m \text{ ungerade, } n \text{ gerade,} & J_0^{(r)} = \left\{1+\dfrac{1+(-1)^r}{2}(-1)^{\frac{r+1.r+2}{2}}\right\}J, \\ \text{wenn } m \text{ ungerade, } n \text{ ungerade,} & J_0^{(r)} = \dfrac{1-(-1)^r}{2}J. \end{cases}$$

Durch diese Formeln ist also die Bestimmung von $J_0^{(r)}$ auf J zurückgeführt,

d. h. auf $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^m \cos x^n dx$, oder, wenn man für $\sin x^2$ eine neue Variable einführt, auf das zweite *Euler*sche Integral

$$J = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \omega^{\frac{m-1}{2}} (1-\omega)^{\frac{n-1}{2}} d\omega,$$

dessen nicht bloss für ganze Werthe von m und n bekannten Werth

$$\tfrac{1}{2}\frac{\int_0^x e^{-x} x^{\frac{m-1}{2}} dx \cdot \int_0^x e^{-x} x^{\frac{n-1}{2}} dx}{\int_0^x e^{-x} x^{\frac{m+n}{2}} dx}$$

Jacobi im 11ten Bande dieses Journals auf einer Quartseite so elegant hergeleitet hat. Demnach sind die folgenden Werthe

für m gerade, n gerade, $J = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5...m-1.1.3.5...n-1}{2.4.6...(m+n)}$,

für m gerade, n ungerade, $J = \frac{1.3.5...m-1.2.4.6...n-1}{1.3.5...(m+n)}$,

für m ungerade, n gerade, $J = \frac{2.4.6...m-1.1.3.5...n-1}{1.3.5...(m+n)}$,

für m ungerade, n ungerade, $J = \frac{2.4.6...m-1.2.4.6...n-1}{2.4.6...(m+n)}$

für J in die Formeln (5.) einzusetzen.

Freiburg, 1863.

Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn *Weierstrass.*

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Zürich.)

1.

Durch Untersuchungen über die kleinen Schwingungen eines zuerst von *Cauchy* behandelten Systems materieller Punkte bin ich zur Verallgemeinerung einiger wichtigen Theoreme des Herrn *Weierstrass* gelangt, welche ich jenen Untersuchungen voranschicke, da sie auch unabhängig von denselben von algebraischem Interesse zu sein scheint.

Ich bezeichne durch

$$\varphi = \Sigma[gh]u_g v_h, \quad \psi = \Sigma(gh)u_g v_h,$$
$$g,h = 0, 1, \ldots n$$

zwei bilineare Functionen der Variabeln $\begin{vmatrix} u & u_1 & \ldots & u_n \\ v & v_1 & \ldots & v_n \end{vmatrix}$, und durch Φ und Ψ die Werthe, welche sie annehmen, wenn jedem Paare von Variabeln conjugirte Werthe

$$u_g = x_g + iy_g, \quad v_g = x_g - iy_g$$

ertheilt werden.

Sind alsdann folgende Voraussetzungen erfüllt,

1) dass die Coefficienten $[gh]$ und $[hg]$, sowie (gh) und (hg) für alle Werthe von g und h zu einander conjugirt sind, und

2) dass Φ nur dann verschwinden kann, wenn die reellen Variabeln x und y sich alle zugleich auf Null reduciren,

so finden folgende Lehrsätze statt:

I. Φ ist reell und von unveränderlichem Zeichen.

II. Die Determinante der bilinearen Funktion φ ist von Null verschieden.

III. Die Determinante $\Delta(s)$ der bilinearen Function $\psi - s\varphi$ verschwindet nur für reelle Werthe von s.

IV. Ist $\Delta_{ik}(t)$ irgend eine erste Unterdeterminante von $\Delta(t)$, so ist die Zerfällung von

$$\frac{\Delta_{ik}(t)}{\Delta(t)}$$

in Partialbrüche stets frei von allen Gliedern, deren Nenner in Bezug auf t den ersten Grad übersteigt.

Die beiden letzten Theoreme gehen in die von Herrn *Weierstrass* (Monatsberichte der Berliner Akademie vom 4. März 1858, pag. 213 u. f.) aufgestellten über, wenn man voraussetzt, dass in den Coefficienten $[gh]$ und (gh) die imaginären Theile fehlen, ohne an den übrigen Bedingungen etwas zu ändern. Sie lassen sich umgekehrt aus diesen herleiten, indem man dieselben auf die Determinante $E(s)$ der homogenen Function zweiten Grades $\Psi - s\Phi$ anwendet, und dann die, von jeder Voraussetzung über die Coefficienten $[gh]$ und (gh) unabhängige Identität $E(s) = [2^{n+1} \Delta(s)]^2$ benutzt *).

Im Folgenden ist ein anderer Weg eingeschlagen worden.

2.

Zunächst bemerkt man, dass wegen 1)

$$\Phi = \Sigma[gh](x_g + iy_g)(x_h - iy_h)$$

zu

$$\Sigma[hg](x_g - iy_g)(x_h + iy_h) = \Phi$$

conjugirt, also reell ist. Dasselbe gilt von Ψ.

Nun würde Φ als stetige Function wegen der zweiten Bedingung sein Zeichen nur in dem Augenblicke wechseln können, wo es selbst mit allen reellen Variablen x und y zugleich durch Null geht. Dass jedoch auch hierbei kein Zeichenwechsel von Φ eintreten kann, erhellt sofort, wenn man alle Variablen, einmal zugleich, dann auch eine nach der anderen bis Null abnehmen, und von dort zu bestimmten Werthen übergehen lässt. In beiden Fällen gelangt Φ als einwerthige Function zum nämlichen Endwerthe, während im zweiten Falle der Werth $\Phi = 0$, also auch jeder Zeichenwechsel von Φ umgangen worden ist.

---

*) Für den Fall, wo $\varphi = uv + u_1 v_1 \ldots$ gesetzt wird, ist das Theorem III. bereits von Herrn *Hermite* aufgestellt worden (Comptes R. tom. 41, pag. 181—183). Herr *Hermite* stützt seinen Beweis auf eine Transformation von $\Delta(s)$ und das von Herrn *Borchardt* für den Fall reeller Elemente (ik) allgemein nachgewiesene Theorem (dieses Journal Band 30 und *Liouville*'s Journal 12). Unter den nämlichen Voraussetzungen ist der Satz von Herrn *Clebsch* (dieses Journal Band 57, pag. 327) bewiesen worden; in einer spätern Abhandlung hat Herr *Clebsch* den Satz für den allgemeinern Fall ausgesprochen, wo bei den oben gestellten Bedingungen die Coefficienten von φ beliebige reelle Werthe haben (dieses Journal Band 62, pag. 235.)

Dies festgestellt, bezeichnen wir durch s und $u, u_1, \ldots u_n$ Grössen, welche den von sämmtlichen v freien Gleichungen

$$(1.) \qquad \frac{1}{s}\frac{\partial \psi}{\partial v_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_h} = 0, \qquad h = 0, 1, \ldots n$$

genügen.

Dann ist

$$(2.) \qquad \frac{1}{s^{n+1}} \Delta(s) = 0$$

die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass man, bei von Null verschiedenem s, den Gleichungen (1.) genügen kann, ohne alle unbekannten Grössen $u, u_1, \ldots u_n$ gleich Null zu setzen.

Sei also s irgend eine Grösse, welche der Gleichung (2.) genügt, und von den Grössen $u, u_1, \ldots u_n$ mindestens eine von Null verschieden.

Zerlegt man alsdann jedes u in seinen reellen und imaginären Bestandtheil, so dass $u_g = x_g + i y_g$ wird, und bestimmt hieraus die conjugirten Werthe $x_g - i y_g = v_g$, so ergiebt sich aus (1.)

$$\frac{1}{s} \Sigma v_h \frac{\partial \psi}{\partial v_h} = \Sigma v_h \frac{\partial \varphi}{\partial v_h},$$

d. i.

$$\frac{1}{s} \Psi = \Phi.$$

Da aber Ψ und Φ beide reell sind, und letzteres, was auch s sein mag, von Null verschieden ist, so kann 1) s nicht imaginär sein, d. h. alle Wurzeln der Gleichung $\Delta(s) = 0$ sind reell, und 2) kann s nicht unendlich gross sein, d. h. die Determinante von φ ist von Null verschieden.

Zum Beweise des vierten Satzes genügt es, zu zeigen, dass jede m-fache Wurzel der Gleichung $\Delta(s) = 0$ zum Mindesten $(m-1)$-fache Wurzel sämmtlicher Gleichungen $\Delta_{ik}(s) = 0$ ist.

Zu diesem Zwecke bemerke man zunächst, dass die in 1) und 2) gestellten Bedingungen nicht aufhören erfüllt zu sein, wenn man in der Function ψ den Coefficienten (kk) um eine reelle Grösse ϱ, oder die beiden conjugirten Coefficienten (gh) und (hg) um die conjugirten Grössen $\varrho e^{\alpha i}$ und $\varrho e^{-\alpha i}$ vermehrt.

Bezeichnet man durch $\Delta_{gh}(t)$ die aus einer Aenderung des Elementes $(gh) - t[gh]$ entspringende Unterdeterminante von $\Delta(t)$, so erhält man an Stelle der Gleichung $\Delta(t) = 0$ im ersten Falle

$$(3.) \qquad \Delta(t) + \varrho \Delta_{kk}(t) = 0,$$

im zweiten dagegen

$$(4.) \qquad \Delta(t)+\varrho e^{\alpha i}\Delta_{gh}(t)+\varrho e^{-\alpha i}\Delta_{hg}(t)+\varrho^2\frac{\partial^2\Delta(t)}{\partial(gh)\partial(hg)}=0.$$

Folglich sind alle Wurzeln dieser beiden Gleichungen reell. Wenn s eine m-fache Wurzel der Gleichung $\Delta(t)=0$ ist, so muss demnach jede der beiden vorstehenden Gleichungen (3.) und (4.) m reelle Wurzeln besitzen, die sämmtlich für $\varrho=0$ in s übergehen. Wenn diese m Wurzeln nicht alle für jedes ϱ gleich s sind, woraus offenbar der zu beweisende Satz schon folgen würde, so muss wenigstens eine von ihnen sich mit ϱ ändern.

Sei t eine solche Wurzel. Unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth von ϱ hinlänglich klein ist, kann man t durch einen nach steigenden Potenzen von ϱ geordneten Ausdruck darstellen, und erhält, wenn man sich auf die beiden ersten Glieder dieser Entwicklung beschränkt,

$$t = s+a\varrho^{\mu}\ldots.$$

In dieser Gleichung ist a reell und von ϱ unabhängig, *μ ist eine von Null verschiedene positive ganze Zahl.*

Wäre μ negativ oder Null, so würde t bei abnehmendem ϱ nicht gegen die Grenze s convergiren; wäre μ eine positive, aber keine ganze Zahl, so würde man für t eine Reihe imaginärer Werthe erhalten können, indem man, was auf den Werth von a keinen Einfluss hat, ϱ negativ, und für ϱ^{μ} einen der complexen Werthe wählt, deren diese Potenz unter den angegebenen Voraussetzungen fähig ist.

Um hieraus den Beweis des vierten Satzes abzuleiten, wie zu jedem anderen Beweise des nämlichen Satzes, ist es nothwendig, zu bemerken, dass bei reellem t die Determinante

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix}(00)-t[00] & (10)-t[10] & \ldots\\ (01)-t[01] & (11)-t[11] & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\end{vmatrix}$$

ebenfalls reell ist. Man erkennt dies sofort, wenn man das Zeichen der $\sqrt{-1}$ ändert, wodurch jede m^{te} Horizontalreihe in die m^{te} Verticalreihe verwandelt wird. Da dies gilt, so lange die in art. 1 für die Coefficienten der Functionen ψ und φ gestellten Bedingungen erfüllt sind, so ergiebt sich gleichzeitig die Realität des Ausdrucks, um den $\Delta(t)$ in der Gleichung (4.) vermehrt worden ist. Dividirt man denselben durch ϱ, und lässt hierauf ϱ verschwinden, so folgt, dass $e^{\alpha i}\Delta_{gh}(t)+e^{-\alpha i}\Delta_{hg}(t)$ für jedes reelle α und t reell, also $\Delta_{gh}(t)$ zu $\Delta_{hg}(t)$ conjugirt ist.

Multiplicirt man endlich die Gleichung (4.) mit $\Delta(t)$, so kann man sie mittelst der bekannten Identität

$$\Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial(gh)\partial(hg)} = \Delta_{gh}\Delta_{hg} - \Delta_{gg}\Delta_{hh}$$

in folgende Form bringen

$$(5.) \quad [\Delta(t)+\varrho e^{\alpha i}\Delta_{gh}(t)][\Delta(t)+\varrho e^{-\alpha i}\Delta_{hg}(t)] = \varrho^2 \Delta_{gg}(t)\Delta_{hh}(t),$$

wo die beiden Factoren der linken Seite zu einander conjugirt sind.

Dies festgestellt, sei

$$\frac{\Delta(t)}{(t-s)^m} = c \quad \text{für} \quad t = s.$$

Dividirt man die Gleichung (3.) in der Voraussetzung eines verschwindenden ϱ durch $a^{-\frac{1}{\mu}}(t-s)^m = \varrho(t-s)^{m-\frac{1}{\mu}}$, so folgt für $\varrho = 0$ oder $t = s$

$$ca^{\frac{1}{\mu}} + \lim. \frac{\Delta_{kk}(t)}{(t-s)^{m-\frac{1}{\mu}}} = 0.$$

Da $ca^{\frac{1}{\mu}}$ weder Null noch unendlich gross ist, so muss $\frac{1}{\mu}$ eine ganze Zahl, also μ selbst als positive ganze Zahl gleich 1 sein.

Daraus schliesst man, dass $\Delta_{kk}(t)$ mindestens $(m-1)$ mal durch $t-s$ theilbar ist.

Dividirt man die Gleichung (5.) bei verschwindendem ϱ zweimal durch $(t-s)^m : a\varrho^{\mu-1} = \varrho(t-s)^{m-1}$, so folgt für $\varrho = 0$ oder $t = s$

$$\lim. \left[ca\varrho^{\mu-1} + e^{\alpha i}\frac{\Delta_{gh}(t)}{(t-s)^{m-1}}\right]\left[ca\varrho^{\mu-1} + e^{-\alpha i}\frac{\Delta_{hg}(t)}{(t-s)^{m-1}}\right] = \lim. \frac{\Delta_{gg}(t)}{(t-s)^{m-1}} \cdot \frac{\Delta_{hh}(t)}{(t-s)^{m-1}}.$$

Da die rechte Seite nicht unendlich gross ist, so gilt dasselbe von den beiden conjugirten Factoren zur Linken. Beachtet man noch, dass $\mu-1$ nicht negativ sein kann, so folgt, dass $\Delta_{gh}(t)$ und $\Delta_{hg}(t)$ in jedem Falle durch $(t-s)^{m-1}$ theilbar sind, w. z. b. w.

Bezeichnet man daher die Wurzeln der Gleichung $\Delta(t) = 0$, so weit sie von einander verschieden sind, durch

$$s,\ s_1,\ \ldots\ s_p,$$

so folgt aus dem vierten Satze, dass man durch Zerfällung in Partialbrüche erhält

$$(6.) \quad \frac{\Delta_{ik}(t)}{\Delta(t)} = \sum_{\delta} \frac{A_{ik}^{\delta}}{s_\delta - t},$$

wo die Summation sich über die verschiedenen Wurzeln s_δ erstreckt, und sämmtliche A von t unabhängig sind.

3.

Die in der Gleichung (6.) eingeführten Grössen A treten bei verschiedenen Untersuchungen auf, weshalb es gestattet sein mag, im Folgenden den Ursprung ihrer wesentlichsten Eigenschaften nachzuweisen.

Man bemerkt zunächst die identische Gleichung

$$(7.)\qquad \sum_{g,h}[(gh)-z[gh]]\Delta_{ih}(x)\Delta_{gk}(y) = \frac{(y-z)\Delta(x)\Delta_{ik}(y)+(z-x)\Delta(y)\Delta_{ik}(x)}{y-x},$$

deren Richtigkeit aus dem Umstande folgt, dass ihre beiden Seiten in Bezug auf z vom ersten Grade sind, und überdies für zwei Werthe von z, nämlich $z=x$ und $z=y$ übereinstimmen.

Dieselbe enthält in symbolischer Vereinigung alle Relationen zwischen den Coefficienten der Functionen φ und ψ und den Grössen A, welche in Bezug auf die letztern vom zweiten Grade sind. Um diese Relationen zu erhalten, darf man die Gleichung (7.) nur durch $\Delta(x)\Delta(y)$ dividiren, und auf beiden Seiten die Formel (6.) anwenden.

Zwischen den nämlichen Grössen bestehen ferner zwei Systeme von Gleichungen, welche nach den Grössen A linear sind. Diese Formelnsysteme sind in den folgenden Gleichungen enthalten, welche den Ausgangspunkt der Untersuchungen des Herrn *Weierstrass* bilden. Aus der Definition der Determinanten $\Delta(x)$ und $\Delta_{ik}(x)$ ergiebt sich

$$(8.)\qquad \begin{cases} u_g = \sum_h \dfrac{\Delta_{gh}(x)}{\Delta(x)}\cdot\dfrac{\partial(\psi-x\varphi)}{\partial v_h}, \\ v_h = \sum_g \dfrac{\Delta_{gh}(x)}{\Delta(x)}\cdot\dfrac{\partial(\psi-x\varphi)}{\partial u_g}. \end{cases}$$

Wendet man hier die Formel (6.) an, so folgt

$$u_g = \sum_\delta \frac{1}{s_\delta - x}\sum_h A^\delta_{gh}\frac{\partial(\psi-x\varphi)}{\partial v_h},$$

$$v_h = \sum_\delta \frac{1}{s_\delta - x}\sum_g A^\delta_{gh}\frac{\partial(\psi-x\varphi)}{\partial u_g},$$

und zwar gilt dies für jedes beliebige x. Lässt man daher x über alle Grenzen wachsen, oder mit einer bestimmten Wurzel, etwa mit s_δ zusammenfallen, so erhält man aus der ersten Gleichung

$$(9.)\qquad \begin{cases} u_g = \sum_\delta \sum_h A^\delta_{gh}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_h}, \\ \sum_h A^\delta_{gh}\dfrac{\partial\psi}{\partial v_h} = s_\delta\sum_h A^\delta_{gh}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_h}, \end{cases}$$

und aus der anderen

$$(10.)\quad \begin{cases} v_h = \sum_{\delta}\sum_{g} A^{\delta}_{gh}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_g}, \\ \sum_{g} A^{\delta}_{gh}\dfrac{\partial\psi}{\partial u_g} = s_\delta \sum_{g} A^{\delta}_{gh}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_g}. \end{cases}$$

Vergleicht man in diesen Formeln die Coefficienten der willkürlichen Grössen u und v, so erhält man die vorhin erwähnten linearen Formelnsysteme.

Endlich kann man die bekannten Ausdrücke für die aus den Grössen $A_{ik}(x)$ gebildeten Determinanten zur Darstellung von Relationen zwischen den Grössen A allein benutzen, was indessen der Kürze wegen übergangen werden kann.

Die vorstehenden Resultate finden ihre Anwendung in der Theorie der bilinearen Functionen und bei der Integration linearer Differentialgleichungen. Ich erlaube mir, in dieser Beziehung einstweilen auf die zu Eingange erwähnte Abhandlung des Herrn *Weierstrass* sowie auf meine folgende Arbeit über kleine Schwingungen zu verweisen.

4.

Durch das Vorangehende ist eine grosse Reihe von Fragen auf die Ermittlung der Bedingungen zurückgeführt, welche erfüllt sein müssen, damit eine bilineare Function

$$\varphi = \Sigma[gh]u_g v_h,$$

deren zusammengehörige Coefficienten $[gh]$, $[hg]$ conjugirt sind, und in welcher jedes Paar u_g, v_h von Variabeln durch ein Paar conjugirter Werthe ersetzt ist, nur dann verschwinden könne, wenn diese Variabeln alle zugleich verschwinden.

Setzt man den Coefficienten [00] gleich Null voraus, so kann man φ für jeden Werth von u zum Verschwinden bringen, indem man alle übrigen Variabeln nebst ihren Conjugirten gleich Null setzt. Es ist also sicher, dass eine der gesuchten Bedingungen darin besteht, dass [00] von Null verschieden sein muss. Ich füge hinzu, dass die übrigen sich aus dieser durch Wiederholung ergeben.

Setzt man

$$[00]\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \varphi_1,$$

so folgt $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = 0$; also ist φ_1 eine bilineare Function der Variabeln $\begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ v_1 & \dots & v_n \end{vmatrix}$, welche das Paar u, v nicht mehr enthält. Setzt man ferner

$$\varphi_1 = \Sigma [gh]_1 u_g v_h,$$

so folgt

$$[gh]_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_g \partial v_h} = [00][gh] - [0h][g0],$$

$$[hg]_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_h \partial v_g} = [00][hg] - [h0][0g];$$

folglich sind die zusammengehörigen Coefficienten dieser neuen Function wieder conjugirt.

Da man endlich

$$\varphi = \frac{1}{[00]} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{[00]} \varphi_1$$

hat, so erkennt man leicht, dass die Constante $[11]_1$ von Null verschieden sein muss. Denn wäre sie gleich Null, so würde man φ für jeden Werth von u_1 zum Verschwinden bringen können, indem man $u_2, u_3, \dots u_n$ gleich Null setzt, und u durch die Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$ bestimmt.

Dies festgestellt, sei

$$[00]\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \varphi_1, \qquad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_g \partial v_h} = [gh]_1,$$

$$[11]_1 \varphi_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} = \varphi_2, \qquad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u_g \partial v_h} = [gh]_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$

$$[n-1, n-1]_{n-1} \varphi_{n-1} - \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u_{n-1}} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial v_{n-1}} = \varphi_n, \qquad \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial u_n \partial v_n} = [nn]_n,$$

$$[nn]_n \varphi_n - \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial v_n} = \varphi_{n+1}.$$

Da von den Functionen φ_g jede aus der vorangehenden auf dieselbe Weise, wie φ_1 aus φ entspringt, so folgt, dass φ_g in Bezug auf die Variabeln $\begin{vmatrix} u_g & \dots & u_n \\ v_g & \dots & v_n \end{vmatrix}$ bilinear, und von den Variabeln $\begin{vmatrix} u & \dots & u_{g-1} \\ v & \dots & v_{g-1} \end{vmatrix}$ unabhängig ist; also ist $\varphi_{n+1} = 0$. Ferner folgt, dass in diesen Functionen die zusammengehörigen Coefficienten conjugirt, und schliesslich, dass alle Constanten $[gg]_g$ von Null verschieden sein müssen.

Folglich hat man die bereits von *Jacobi* (Bd. 53, p. 269 dieses Journals) gegebene Transformation:

$$\varphi = \frac{1}{[00]}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{[00][11]_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v_1}+\cdots+\frac{1}{[00][11]_1\ldots[nn]_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial u_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial v_n}.$$

Ersetzt man aber in den linearen Functionen

$$\frac{\partial\varphi_g}{\partial u_g}=\sum_h[gh]_g v_h, \qquad \frac{\partial\varphi_g}{\partial v_g}=\sum_h[hg]_g u_h$$

die Paare u_h, v_h durch die conjugirten Werthe x_h+iy_h, x_h-iy_h, so erlangen sie conjugirte Werthe f_g+if_g', f_g-if_g', wo f_g, f_g' lineare Functionen von x_g, y_g, x_{g+1}, . . . y_n mit reellen Coefficienten bedeuten. Mittelst der im art. 1. eingeführten Bezeichnung erhält man also aus der vorigen Gleichung

$$\Phi = \frac{1}{[00]}(f^2+f'^2)+\frac{1}{[00][11]_1}(f_1^2+f_1'^2)+\cdots+\frac{1}{[00][11]_1\ldots[nn]_n}(f_n^2+f_n'^2).$$

Durch diese Zerfällung der Function Φ ist bewiesen, dass die zweite Bedingung des art. 1. auch durch die folgende ersetzt werden kann,

dass die Grössen

$$[00],\quad [11]_1,\quad \ldots\quad [nn]_n$$

von Null verschieden und positiv sein müssen, mit Ausnahme der ersten, die ein beliebiges Zeichen haben kann.

Es ist zu bemerken, dass die Anzahl dieser Bedingungen genau die nämliche ist, wie in dem einfacheren Falle, wo die Function φ weder in ihren Coefficienten, noch in den conjugirten Variabeln imaginäre Theile enthält.

5.

An die vorangehenden Untersuchungen anknüpfend, werde ich zunächst die dort gestellten Bedingungen von einer wesentlichen Einschränkung befreien, welche ohne Nachtheil für die Einfachheit der Beweise und die bequeme Einsicht in sämmtliche Beweisgründe nicht hätte unterdrückt werden können.

Die erwähnten Bedingungen bestanden darin, 1) dass in jeder der beiden bilinearen Functionen φ, ψ die Coefficienten von $u_g v_h$, $u_h v_g$ stets zu einander conjugirt sind, und 2) dass φ bei conjugirten Werthen der Paare u_g, v_g nur mit diesen zugleich verschwinden kann. Daraus folgten, ausser zwei

Sätzen, die hier nicht mehr in Betracht kommen, die beiden anderen, dass die Wurzeln der Gleichung $\Delta(t) = 0$ reell sind, und dass die ersten Unterdeterminanten *von $\Delta(t)$ jeden Linearfactor dieser Function höchstens einmal* weniger *enthalten, als diese selbst ihn besitzt.*

Die zweite von diesen Bedingungen lässt sich, ohne dass eines der vorstehenden Theoreme seine Gültigkeit verliert, dahin abändern, *dass φ bei conjugirten Werthen der Paare u_g, v_g unveränderliches Zeichen besitzen muss.*

Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, bedarf es nur des Nachweises, dass bei diesen geänderten Bedingungen die Wurzeln der Gleichung $\Delta(t) = 0$ reell bleiben, indem hieraus der andere Satz folgt (pag. 257–259).

Um diesen Nachweis zu führen, denke man sich φ mittelst des zu Ende des vorigen art. angeführten Verfahrens in eine Summe von gleichbezeichneten Gliedern zerfällt. Wenn dann φ der oben erweiterten, aber nicht der ursprünglichen zweiten Bedingung genügt, so muss in jener Zerfällung eine Anzahl von Gliedern, vom letzten an gerechnet, fehlen. Dies festgestellt, kann man offenbar die beiden ursprünglichen Bedingungen befriedigen, indem man für jedes in φ fehlende Glied ein anderes von der durch die Zerfällung verlangten Form einsetzt, welches mit einem stetig abnehmenden Coefficienten versehen ist. Dann werden alle Wurzeln der Gleichung $\Delta(t) = 0$ reell, und dies bleibt bis zur Grenze bestehen, wo die neu eingeführten Glieder wieder verschwinden.

Hieran schliessen sich nun einige weitere Untersuchungen, welche die ausserordentliche Tragweite der vorstehenden Bedingungen in einer höchst bemerkenswerthen Weise hervortreten lassen.

Was diese Bedingungen für den gegenwärtigen Zweck vorzugsweise charakterisirt, besteht darin, dass durch sie zwei Sätze mit einander verknüpft sind, von denen offenbar unter geänderten Bedingungen jeder ohne den andern bestehen kann. Am meisten Interesse bietet in dieser Beziehung der zweite von obigen Sätzen dar, indem derselbe durch einfache Modificationen in den bilinearen Functionen φ, ψ auf unzählig viele Fälle ausgedehnt werden kann, in denen von den obigen Bedingungen keine mehr erfüllt ist.

6.

Ich bezeichne durch $z = x + iy$ eine complexe veränderliche Grösse und, indem x und y in der üblichen Weise als rechtwinklige Coordinaten in

einer Ebene E dargestellt werden, jeden Punkt dieser Ebene durch den ihm entsprechenden Werth von z.

In dieser Ebene sei eine Anzahl von Punkten P gegeben, die keine Linie stetig erfüllen, und eine Linie L von messbarer Länge, die keinen dieser Punkte P enthält.

In den bilinearen Functionen φ und ψ ersetze ich sämmtliche Coefficienten durch complexe Functionen von z, die ausserhalb der Punkte P in der ganzen Ebene E einwerthig, endlich und stetig sind, und an der ganzen Linie L entlang den folgenden Bedingungen genügen:

1) dass $[gh]$ und $[hg]$, sowie (gh) und (hg) an L entlang conjugirt sind;
2) dass φ, wenn jedes Paar u_g, v_g durch ein Paar von stets zu einander conjugirten Variabeln ersetzt wird, an L entlang keines Zeichenwechsels fähig ist;
3) dass man an L entlang auf keinen Punkt trifft, in dem zwei, vorher von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $\Delta(t) = 0$ einander gleich werden.

Bezeichnet man nun durch Q diejenigen Punkte der Ebene E, in denen eine dieser Wurzeln unendlich gross oder einer sonst von ihr verschiedenen gleich wird, so folgt aus den vorstehenden Bedingungen der Satz,

dass in der ganzen Ebene E mit Ausnahme der Punkte Q die Unterdeterminanten $\Delta_{ik}(t)$ jeden Linearfactor von $\Delta(t)$ höchstens einmal weniger enthalten, als diese Function selbst ihn besitzt.

Beim Beweise dieses Satzes habe ich die genauere Erörterung mehrerer Punkte nicht umgehen zu dürfen geglaubt. Zunächst schicke ich folgende Bemerkung über die Vertheilung der Punkte Q in der Ebene E voraus.

Setzt man $\Delta(t)$ seiner Zerfällung in Linearfactoren gleich, und bezeichnet durch K den Factor der höchsten Potenz von $-t$ im Ausdrucke von $\Delta(t)$, so folgt, dass einer dieser Linearfactoren, also eine Wurzel der Gleichung $\Delta(t) = 0$, nur dann unendlich werden kann, wenn entweder $\Delta(t)$ für jedes endliche t unendlich wird, oder, falls dies endlich bleibt, wenn K verschwindet. Das erstere findet nur in Punkten P statt; die Punkte P', in denen die ausserhalb der Punkte P einwerthige, endliche und stetige Function K verschwindet, können keine messbare Linie stetig erfüllen, weil K nicht in der ganzen Ebene gleich Null ist.

Dasselbe gilt aus gleichen Gründen von den Punkten P'', in denen zwei, sonst von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $\Delta(t) = 0$ ein-

ander gleich werden. In der That ist das aus sämmtlichen Differenzen dieser Wurzeln gebildete Product in Bezug auf dieselben symmetrisch, also einwerthig, und da es nur mit einer dieser Wurzeln zugleich unendlich oder unstetig werden kann, ausserhalb der Punkte P, P' endlich und stetig. Da es wegen 3) an L entlang von Null verschieden ist, so können die Punkte P'', in denen es verschwindet, keine Linie von messbarer Länge stetig erfüllen.

Daraus folgt, dass die Punkte Q in der Ebene E so vertheilt sind, dass sie für sich allein keinen Theil derselben völlig begrenzen.

Dies festgestellt, sei in irgend einem Punkte der Linie L

$$\Delta(t) = K(s-t)^{m}(s_1-t)^{m_1}\dots(s_p-t)^{m_p},$$

und jede der Grössen s, s_1, $\dots$ s_p von jeder andern verschieden. Dann sind wegen 3) die Exponenten m, m_1, $\dots$ m_p der verschiedenen Linearfactoren an L entlang unveränderlich, und die Grössen s auf derselben Strecke reell. Ausserdem liefert das *Weierstrass*sche Theorem auf dieser Linie für $\Delta_{ik}(t)$ einen Ausdruck

$$\Delta_{ik}(t) = (s-t)^{m-1}(s_1-t)^{m_1-1}\dots(s_p-t)^{m_p-1}\delta_{ik}(t),$$

wo $\delta_{ik}(t)$ eine rationale ganze Function von t ist.

Es handelt sich nun darum, zu beweisen, dass bei gehörigen Bestimmungen über die den Grössen s ausserhalb L beizulegende Bedeutung diese beiden Zerfällungen ausserhalb der Punkte Q in der ganzen Ebene E gültig sind.

Die Grössen s, s_1, $\dots$ s_p sind vorläufig nur durch die Factorenzerfällung von $\Delta(t)$, also an L entlang definirt. Man kann sich dieselben aber auch noch auf eine zweite Art, nämlich dadurch entstanden denken, dass der vorher ausserhalb L befindliche Punkt z durch stetige Ortsänderung in diese Linie eintritt, wobei dann die Wurzeln der Gleichung $\Delta(t)=0$ stetig in die Grössen s, s_1, $\dots$ s_p übergehen.

Aus diesem Grunde kann man daher auch rückwärts die an L entlang durch die obige Factorenzerfällung definirten Functionen s mittelst der Differentialgleichung $\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}\sqrt{-1}$ von dieser Linie aus zu benachbarten Flächentheilen stetig fortsetzen. Fügt man, um hierbei jede Unbestimmtheit auszuschliessen, die Bedingung hinzu, dass die Fortsetzung dieser Functionen von L aus nach gegebenen Theilen von E stets gleichzeitig an denselben Flächentheilen entlang erfolgen soll, so fällt jede von ihnen an jeder Stelle mit einer dort vorhandenen Wurzel der Gleichung $\Delta(t)=0$ zusammen, da diese Fortsetzung nach einem bekannten Satze nur auf eine Weise möglich ist, also zu

denselben Functionen zurückführen muss, aus denen man sich, auf dem vorhin beschriebenen Wege nach L zurückkehrend, die dort gegebenen Functionen s entstanden denken kann. Bei dieser stetigen Fortsetzung der Functionen s ist kein Theil der Ebene E unerreichbar, da die Punkte Q, welche allein bei derselben umgangen werden müssen, keinen Theil dieser Ebene von den übrigen trennen.

Bei der gleichzeitigen Fortsetzung aller s verwandeln sich die rechten Seiten obiger Gleichungen, die ich durch $D(t)$, $D_{ik}(t)$ bezeichnen will, in complexe Functionen von z, die in jedem Augenblicke ausserhalb der Punkte Q einwerthig, endlich und stetig sind. Da die Differenzen $\Delta(t)-D(t)$, $\Delta_{ik}(t)-D_{ik}(t)$ an der Linie L entlang verschwinden, so können sie demnach ausserhalb der Punkte Q auch in keinem anderen Theile der Ebene von Null verschieden sein. Damit ist der obige Satz bewiesen.

Wenn in einem Punkte Q zwei vorher verschiedene Wurzeln s und s_1 einander gleich werden, so wird dort $\Delta(t)$ den Factor $s-t$ im Allgemeinen zweimal öfter enthalten als $\Delta_{ik}(t)$, nämlich stets und auch nur dann, wenn dort $\delta_{ik}(t)$ nicht ohne Rest durch $s-t$ theilbar wird.

Der obige Satz beschränkt sich offenbar nicht auf den Fall, wo die Functionen $[gh]$, (gh) bloss von einer einzigen Variablen z abhängen.

Es seien z, z_1, z_2, ... complexe Variable, und ihnen entsprechend L, L_1, L_2, ... ununterbrochen zusammenhängende Werthenreihen, von denen jede bei der geometrischen Darstellung der zugehörigen Variablen durch eine Linie von messbarer Länge repräsentirt wird.

Sind alsdann alle $[gh]$, (gh) einwerthige Functionen von z, z_1, z_2, ..., welche den oben gestellten Bedingungen genügen, solange jede Variable z_i der entsprechenden Werthenreihe L_i angehört, und deren Unstetigkeitsstellen P durch keine dieser Werthenreihen gehen und auch keinen Theil des Grössengebietes vollständig begrenzen, aus welchem die Variablen z, z_1, z_2, ... ihre Werthe entnehmen; dann gilt der obige Satz im ganzen Umfange dieses Gebietes, mit Ausnahme derjenigen Stellen Q, an denen entlang eine der Functionen s, s_1, ... s_p aufhört, endlich oder von jeder anderen verschieden zu sein.

Der Beweis dieses Satzes, in welchem die Einwerthigkeit der Functionen $[gh]$, (gh) auch durch Bedingungen erzwungen sein kann, ergiebt sich durch wiederholte Anwendung des vorigen; man lässt nämlich in der Voraussetzung, dass jede Variable z_i in der entsprechenden Werthenreihe L_i ent-

halten ist, zunächst nur z aus L heraustreten; dann weist man z ausserhalb L einen festen Werth an, und lässt nun auch z_1 aus L_1 herausrücken, u. s. w. Dann hört der Satz nach der oben angewandten Schlussweise in keinem Augenblicke auf, gültig zu sein, so lange man in keine der durch Q bezeichneten Stellen eintritt.

7.

Der hiermit begründete Satz lässt sich nun ohne Weiteres auf solche Fälle ausdehnen, wo die erste von den oben gestellten Bedingungen in gegebener Weise verletzt ist.

Wenn nämlich die Coefficienten der bilinearen Functionen φ', ψ' dieser ersten Bedingung nirgendwo oder an keiner nachweisbaren Strecke entlang Genüge leisten, so führe man statt φ', ψ' zwei neue bilineare Functionen φ, ψ ein, deren Coefficienten man als einwerthige Functionen von z so wählt, dass sie für $z=0$ mit den Coefficienten jener zusammenfallen, und an einer Linie L entlang die verlangte Eigenschaft annehmen. Wenn alsdann φ und $\Delta(t)$ auf einem messbaren Stücke dieser Linie auch den übrigen Bedingungen genügen, und im Punkte $z=0$ keine ausserhalb desselben von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Delta(t)=0$ zusammenfallen, auch keine derselben dort unendlich wird, so ist die Gültigkeit des Satzes auch für diesen Punkt, d. h. für die Determinante von $\psi'-t\varphi'$ und ihre Unterdeterminanten bewiesen.

Am Einfachsten erzwingt man die erste Bedingung durch Einführung linearer Functionen von z. Haben in den Functionen

$$\varphi' = \Sigma[gh]' u_g v_h, \qquad \psi' = \Sigma(gh)' u_g v_h$$

die Coefficienten $[gh]'$, $(gh)'$ beliebige Werthe, und bezeichnet man durch $[gh]''$, $(gh)''$ ihre Conjugirten, so ertheile man in den statt jener zu betrachtenden Functionen φ, ψ den Coefficienten die Werthe

$$[gh] = \frac{[gh]'+[hg]''}{2} + \frac{[gh]'-[hg]''}{2}(1-z), \quad (gh) = \frac{(gh)'+(hg)''}{2} + \frac{(gh)'-(hg)''}{2}(1-z);$$

dann wird offenbar für $z=0$ $[gh]=[gh]'$, $(gh)=(gh)'$, dagegen an der ganzen Geraden $x=1$ entlang $[gh]$ zu $[hg]$, (gh) zu (hg) conjugirt.

Im gegenwärtigen Falle liegen die durch P bezeichneten Punkte im Unendlichen, die Punkte P', in denen K verschwindet, so wie die Punkte P'', in denen sonst verschiedene Wurzeln der Gleichung $\Delta(t)=0$ zusammen-

fallen, sind nur in endlicher Zahl vorhanden, da K und $\Delta(t)$ in Bezug auf z algebraisch sind.

Wenn daher die zweite Bedingung auf irgend einer messbaren Strecke der Geraden $x=1$ erfüllt ist, und der Werth $z=0$ keinen Punkt P' oder P'' bestimmt, so muss jeder Linearfactor der Determinante von $\psi'-t\varphi'$ in ihren ersten Unterdeterminanten höchstens einmal weniger vorkommen, als in ihr selbst.

8.

Im Vorangehenden ist gezeigt, wie man der ersten von den obigen Bedingungen genügen kann, wenn sie nicht bereits erfüllt ist.

Die sich hieran schliessende Untersuchung, ob auch die zweite Bedingung erfüllt ist, erledigt sich durch das am Schlusse des ersten Theiles dieser Arbeit angeführte Verfahren.

Es bleibt nur noch übrig, ein brauchbares Hülfsmittel anzugeben, welches unter Voraussetzung der beiden ersten Bedingungen diejenigen für die Existenz und die Anzahl vielfacher Wurzeln der Gleichung $\Delta(t)=0$ liefert. Dasselbe ist in der folgenden Umkehrung des zweiten *Weierstrass*schen Theorems enthalten.

> Wenn unter Voraussetzung der beiden ersten Bedingungen s eine Wurzel der Gleichung $\Delta(t)=0$, und $(t-s)^{m-1}$ die höchste Potenz von $t-s$ ist, durch welche die Unterdeterminanten
>
> $$\Delta_{00}(t), \quad \Delta_{11}(t), \quad \ldots \quad \Delta_{nn}(t)$$
>
> alle theilbar sind, so ist $\Delta(t)$ durch $(t-s)^m$, aber durch keine höhere Potenz von $t-s$ theilbar.

Ist p der Exponent der höchsten Potenz von $t-s$, durch welche $\Delta(t)$ ohne Rest theilbar ist, so ist jede Unterdeterminante $\Delta_{ik}(t)$ $(p-1)$-mal durch $t-s$ theilbar; also kann p nicht grösser als m sein. Dass es auch nicht kleiner als m sein kann, ergiebt sich durch folgende Betrachtung.

Sind ϱ und α beliebige reelle Zahlen, so hat jede Gleichung (pag. 258)

$$\Delta(t)+\varrho e^{\alpha i}\Delta_{gh}(t)+\varrho e^{-\alpha i}\Delta_{hg}(t)+\varrho^2\frac{\partial^2\Delta(t)}{\partial(gh)\partial(hg)}=0$$

p reelle Wurzeln, die mit abnehmendem ϱ stetig in s übergehen, wenn sie nicht schon unabhängig von ϱ gleich s sind. Im letzteren Falle würde $\Delta_{gh}(t)$ durch $(t-s)^p$ theilbar sein.

Ist dagegen eine jener p Wurzeln von ϱ abhängig, und für ein verschwindendes ϱ bis auf Grössen höherer Ordnung gleich $s+a\varrho^{\mu}+\cdots=t$, so erhält man die Gleichung (pag. 259, wo m durch p zu ersetzen ist)

$$\lim\left[ca\varrho^{\mu-1}+e^{\alpha i}\frac{\Delta_{gh}(t)}{(t-s)^{p-1}}\right]\left[ca\varrho^{\mu-1}+e^{-\alpha i}\frac{\Delta_{hg}(t)}{(t-s)^{p-1}}\right]=\lim\frac{\Delta_{gg}(t)}{(t-s)^{p-1}}\cdot\frac{\Delta_{hh}(t)}{(t-s)^{p-1}},$$

wo c den Werth von $\frac{\Delta(t)}{(t-s)^{p}}$ für $t=s$ bedeutet, und das Zeichen lim. sich auf die Abnahme von ϱ oder $t-s$ bezieht.

Nimmt man nun an, es sei $p-1<m-1$, so wird die rechte Seite, also auch jeder der beiden conjugirten Factoren zur Linken gleich Null. In der hieraus folgenden Gleichung

$$\lim\left[ca\varrho^{\mu-1}+e^{\alpha i}\frac{\Delta_{gh}(t)}{(t-s)^{p-1}}\right]=0$$

ist der erste Summand für jeden Werth von α und ϱ reell, da μ eine ganze Zahl ist. Da ferner $\frac{\Delta_{gh}(t)}{(t-s)^{p-1}}$ für $\varrho=0$ oder $t=s$ von α ganz unabhängig wird, so würde man, wenn der Grenzwerth A dieses Quotienten von Null verschieden wäre, den Winkel α so wählen können, dass das Product $Ae^{\alpha i}$ imaginär wird, was mit dem Verschwinden der Summe $ca\varrho^{\mu-1}+Ae^{\alpha i}$ unvereinbar ist. Da hiernach $\frac{\Delta_{gh}(t)}{(t-s)^{p-1}}$ auch unter der gegenwärtigen Voraussetzung für $t=s$ verschwindet, so ist $\Delta_{gh}(t)$, sobald $p<m$ ist, in allen Fällen durch $(t-s)^{p}$ theilbar. Dann aber ist auch die Derivirte von $\Delta(t)$ durch $(t-s)^{p}$, also $\Delta(t)$ selbst, weil es für $t=s$ verschwindet, durch $(t-s)^{p+1}$ theilbar, gegen die Voraussetzung. Folglich kann auch nicht $p<m$ sein, w. z. b. w.

Wenn $\Delta(t)$ durch die m^{te}, aber durch keine höhere Potenz von $t-s$ theilbar ist, so ist umgekehrt $(t-s)^{m-1}$ die höchste Potenz, durch welche sämmtliche $\Delta_{gg}(t)$ ohne Rest aufgehen. In der That bildet die Annahme des Gegentheils einen Widerspruch mit obigem Satze.

Da hiernach das Bestehen des Satzes mit einer Verletzung der ihm zu Grunde gelegten Bedingungen unverträglich ist, so sind diese zu seiner Gültigkeit nicht bloss ausreichend, sondern auch nothwendig. Dagegen sind sie nicht stets von einander unabhängig.

Ist nämlich in obigem Satze $m-1>1$, so ist die Bedingung, dass s eine Wurzel der Gleichung $\Delta(t)=0$ sein soll, von selbst erfüllt.

Wenn die bilinearen Functionen φ, ψ den beiden ersten Bedingungen genügen, so ist dies offenbar auch mit den bilinearen Functionen φ_g, ψ_g der Fall, die man aus jenen erhält, indem man $u_g = 0$, $v_g = 0$ setzt. Da aber die Determinante von $\psi_g - t\varphi_g$ nichts Anderes als $\Delta_{gg}(t)$ ist, so gelten für die Beziehungen zwischen dieser und ihren eigenen Unterdeterminanten dieselben Sätze, wie für die Beziehung zwischen $\Delta(t)$ und $\Delta_{gg}(t)$ selbst.

Ist $\Delta_{gg}(t)$ für jedes g durch $(t-s)^{m-1}$ theilbar, so muss hiernach in der identischen Gleichung

$$\Delta_{gg}(t)\Delta_{hh}(t) - \Delta_{gh}(t)\Delta_{hg}(t) = \Delta(t)\frac{\partial^2\Delta(t)}{\partial(gg)\partial(hh)}$$

die rechte Seite, und mit ihr das zweite Glied der linken für jedes g und h mindestens $(m-2)$-mal durch $t-s$ theilbar sein. Da aber $\Delta_{gh}(t)$ und $\Delta_{hg}(t)$ als conjugirte Grössen den reellen Factor $t-s$ gleich oft besitzen müssen, so enthält jede von ihnen diesen Factor mindestens $\left[\frac{m-1}{2}\right]$-mal, wenn man so die grösste in $\frac{m-1}{2}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Aus dem linearen Ausdrucke von $\Delta(t)$ durch die Unterdeterminanten einer beliebigen Reihe folgt also, dass auch $\Delta(t)$ selbst den Factor $t-s$ mindestens $\left[\frac{m-1}{2}\right]$-mal, also ihn jedenfalls besitzt, sobald $m-1 > 1$ ist.

Durch diese Sätze ist die Frage, ob und wieviel Linearfactoren von $\Delta(t)$ einander gleich sind, auf die Ermittlung derjenigen gemeinsamen Factoren der Unterdeterminanten $\Delta_{(0)}(t)$, $\Delta_{11}(t)$, ... $\Delta_{nn}(t)$ zurückgeführt, mit denen $\Delta(t)$ zugleich verschwindet.

Es lässt sich mittelst derselben auch umgekehrt beurtheilen, wie man zu den Bedingungen gelangen kann, welche erfüllt sein müssen, wenn die Anzahl der von einander verschiedenen Linearfactoren, und von jedem derselben der Exponent gegeben ist.

Um zu diesen Bedingungen zu gelangen, bedarf es nur einer Wiederholung der obigen Sätze.

Damit z. B. $\Delta(t)$ einen Linearfactor m-mal enthalte, muss jedes $\Delta_{gg}(t)$ ihn $(m-1)$-mal besitzen; da aber der Satz auch für $\Delta_{gg}(t)$ gilt, so muss jede zweite Unterdeterminante $\frac{\partial^2\Delta(t)}{\partial(gg)\partial(hh)}$ ihn $(m-2)$-mal enthalten, u. s. w.

Umgekehrt, wenn alle Unterdeterminanten

$$\frac{\partial^{m-1}\Delta(t)}{\partial(g_1g_1)\partial(g_2g_2)\ldots\partial(g_{m-1}g_{m-1})}$$

einen einzigen Linearfactor mit einander gemein haben, mit welchem zugleich alle zunächst vorangehenden Unterdeterminanten

$$\frac{\partial^{m-2} \Delta(t)}{\partial(g_1 g_1) \ldots \partial(g_{m-2} g_{m-2})}$$

verschwinden, so ist $\Delta(t)$ durch ihn $m-$mal und nicht öfter theilbar.

Es wäre überflüssig, die hieraus für allgemeinere Fälle durch Zusammensetzung folgenden Regeln auszuführen; ebenso können Angaben über gelegentliche Erleichterungen bei der wirklichen Aufstellung der besprochenen Bedingungen übergangen werden, da sie durch das obige Theorem in Verbindung mit demjenigen, dessen Umkehrung es ist, offen dargelegt sind.

Zürich, 1864.

Ueber die kleinen Schwingungen eines periodisch eingerichteten Systems materieller Punkte.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Zürich.)

Die vorliegende Abhandlung enthält die vollständige Lösung des bekannten Problems, die unendlich kleinen Schwingungen eines Systems räumlich getrennter materieller Punkte zu bestimmen, zwischen denen anziehende und abstossende Kräfte wirken, und welche in periodisch wiederkehrenden Gruppen im Raume vertheilt sind.

Cauchy, welcher mit diesem Problem der analytischen Optik eine neue Grundlage zu geben gedachte, legte demselben eine grosse Bedeutung bei, wie aus den zahlreichen Abhandlungen hervorgeht, in denen er sich mit diesem Problem beschäftigt. Dieselben finden sich, soweit sie mir bekannt geworden sind, in den Comptes rendus vom 9ten bis zum 30sten Bande und im 22sten Bande der Memoiren der Pariser Akademie; die ersteren sind zum Theil in den Exercices wiederholt.

Der nächste Weg, welcher sich zur Lösung des vorliegenden Problemes darbietet, besteht in der Ermittlung der Gesetze, nach denen die periodischen Bewegungen des Systems in ebenen Wellen erfolgen. Sind diese bekannt, so liefert der *Fourier*sche Satz unmittelbar die allgemeinen Formeln für die Bewegung, welche auf einen beliebigen Anfangszustand folgt.

Aber diese Lösung kann nicht als vollendet angesehen werden; im art. III. der folgenden Abhandlung wird nachgewiesen, dass die vielfachen Integrale, auf welche man durch den *Fourier*schen Satz geführt wird, Elemente enthalten, welche der Lösung vollkommen fremd sind, und welche daher durch eine Reduction jener Integrale ausgeschieden werden müssen.

Durch eine genauere Untersuchung der algebraischen Functionen, welche in diese Integrale eingehen, ist die verlangte Reduction gelungen, zunächst für die einfacheren Ausdrücke, welche *Cauchy* am Schlusse des §. 2. seiner Abhandlung über die Farbenzerstreuung giebt, dann auch für die Lösung des allgemeinen Problems.

In der vorliegenden Abhandlung ist der umgekehrte Weg eingeschlagen worden. Nachdem im art. III. nachgewiesen worden ist, welche Re-

ductionen sich bei der Anwendung des *Fourier*schen Satzes als nothwendig herausstellen, wird die Aufgabe so gestellt und behandelt, dass man von Anfang an die Gewissheit hat, die Lösung in einer Form zu erhalten, welche keiner weitern Reduction mehr bedürftig ist.

Es hat sich auf diesem Wege das merkwürdige Resultat ergeben, dass die Bewegung des zu untersuchenden Systems, auch unter den allgemeinsten Voraussetzungen, stets nur von einer einzigen Klasse analytischer Functionen einer veränderlichen Grösse t abhängt, deren reelle Werthe die seit der anfänglichen Gleichgewichtsstörung verflossene Zeit bestimmen. Diese Functionen habe ich durch $T^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''}$ bezeichnet, und ihren Ausdruck durch ein dreifaches Integral mit endlicher Begrenzung im art. IX. Formel 18 angegeben.

I.

Obgleich das Problem, mit welchem die vorliegende Abhandlung sich beschäftigt, allgemein bekannt ist, lässt sich doch eine ausführliche Darlegung desselben nicht füglich umgehen.

Ist Π ein System materieller Punkte, so wird dasselbe vollkommen homogen genannt, wenn es folgenden Bedingungen genügt:

1) Alle Punkte des Systems besitzen dieselbe Masse.

2) Sind a, b, c irgend welche Punkte des Systems, und zieht man aus c eine Gerade cd von gleicher Länge und Richtung, wie ab, so ist d ebenfalls ein Punkt des Systems.

Fügt man zu diesen Bedingungen das Grundprincip der atomistischen Theorie,

3) dass die Entfernung zweier materieller Punkte, wie klein sie im Uebrigen auch sein mag, doch niemals unter jeder Grenze liegt.

so ist das System Π nothwendig ein reticulares, d. h. die materiellen Punkte dieses Systems befinden sich in den Durchschnittspunkten dreier Schaaren von Ebenen, welche den Raum in congruente Parallelepipeda zerlegen *); lässt man den besondern Fall, wo eine oder zwei Kanten dieser Parallepipede unendlich gross sind, unberücksichtigt, so sind also die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der verschiedenen Punkte $m_{lll'}$ des Systems Π durch lineare Gleichungen

$$m_{lll'}. \qquad \begin{aligned} x &= \alpha + al + a'l' + a''l'', \\ y &= \beta + bl + b'l' + b''l'', \\ z &= \gamma + cl + c'l' + c''l'' \end{aligned}$$

*) Man vergleiche *Dirichlets* Abhandlung über die positiven ternären quadr. Formen, dieses Journal Band 40.

gegeben, in denen l, l', l'' jedes ganzzahligen Werthes fähig, und die übrigen Grössen rechter Seite unveränderlich sind.

Diese Definition lässt sich, wie *Cauchy* bemerkt *), auf homogene Mittel, welche aus chemisch differenten Atomen zusammengesetzt sind, nur anwenden, wenn man sich die Massenpunkte $m_{lll''}$ durch Atomengruppen ersetzt denkt, welche um jede Ecke der vorhin erwähnten Parallelepipede in gleicher Weise angeordnet sind.

Wir fügen hiernach zum homogenen System Π noch N andere, Π_1, Π_2, ... Π_N, die so geordnet sind, dass die Coordinaten des zu Π_i gehörigen Punktes $m^i_{lll''}$ mit den obigen durch die Gleichungen

$$m^i_{lll''}. \qquad x_i-\alpha_i=x-\alpha, \quad y_i-\beta_i=y-\beta, \quad z_i-\gamma_i=z-\gamma$$

verbunden sind. Zu jeder Werthengruppe (l, l', l'') gehört dann eine Gruppe materieller Punkte $m_{lll''}$, $m^1_{lll''}$, ... $m^N_{lll''}$, die in ihren physikalischen Eigenschaften übereinstimmen oder von einander verschieden sein können. Diese Gruppen wiederholen sich periodisch auf dieselbe Weise, wie die Punkte des Systems Π; ihre Gesammtheit kann also ebenfalls als ein homogenes System P angesehen werden.

Es sind nun die superponirbaren kleinen Schwingungen eines solchen periodisch eingerichteten Systems P, mit denen die gegenwärtige Arbeit sich beschäftigt. Und zwar fügen wir zu den obigen Voraussetzungen über die Einrichtung des Systems P noch die folgenden, welche die in ihm wirkenden Kräfte betreffen.

Wir setzen voraus, dass zwischen den einzelnen materiellen Punkten von P Attractionen (Anziehungen und Abstossungen) wirken, durch welche sie, bei der oben beschriebenen Einrichtung des Systems P im stabilen relativen Gleichgewichte erhalten werden.

Es seien ferner $m^i_{lll''}$ und $m^k_{l+n,l'+n',l''+n''}$ zwei beliebige Punkte von P, deren Massen und Coordinaten beziehungsweise m^i, x_i, y_i, z_i und m^k, x'_k, y'_k, z'_k sind. Dann wirkt an m^i in Folge der gegenseitigen Attraction beider Punkte in ihrer Verbindungslinie eine Kraft, die bloss von ihrer Entfernung (ik) abhängt, und durch

$$\frac{\partial[ik]}{\partial(ik)}$$

bezeichnet werden soll. Die Componenten dieser Kraft werden also ausge-

*) Comptes rendus Tome 9, pag. 558.

drückt durch

$$\frac{\partial[ik]}{\partial x_k'}, \quad \frac{\partial[ik]}{\partial y_k'}, \quad \frac{\partial[ik]}{\partial z_k'}.$$

Ueber die Massen m, m', ... m^N, so wie über die Attractionsgesetze, welche durch das Zeichen $\frac{1}{m^i m^k}\frac{\partial[ik]}{\partial(ik)}$ bei verschiedenen Werthen der Indices i und k dargestellt werden, lassen wir die allgemeinsten Voraussetzungen bestehen; wir setzen also weder zwischen zwei von jenen $N+1$ Massen, noch zwischen zwei von den im Allgemeinen denkbaren $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ Attractionsgesetzen die Gleichheit voraus.

Da die Differenzen $x_k'-x_i$, $y_k'-y_i$, $z_k'-z_i$, von denen die erste nach der oben eingeführten Bezeichnung $=\alpha_k-\alpha_i+an+a'n'+a''n''$ ist, nur noch von den ganzen Zahlen n, n', n'' abhängen, welche für den angezogenen Punkt $m^i_{ll'l''}$ die relative Lage des anziehenden Punktes $m^k_{l+n,l'+n',l''+n''}$ bestimmen, so erhält man die Gleichgewichtsbedingungen für jeden Punkt $m^i_{ll'l''}$ von Π_i, wenn man in den Gleichungen

$$(1.) \qquad 0=\sum_{nn'n''}\sum_{k}\frac{\partial[ik]}{\partial x_k'}, \quad 0=\sum_{nn'n''}\sum_{k}\frac{\partial[ik]}{\partial y_k'}, \quad 0=\sum_{nn'n''}\sum_{k}\frac{\partial[ik]}{\partial z_k'}$$

die erste Summation über alle ganzzahligen Werthe von n, n', n'', die zweite über die Werthe $k=0, 1, \ldots N$ erstreckt, mit Weglassung des einzigen Gliedes $(n=n'=n''=0,\ k=i)$.

Ertheilt man hierauf dem Index i der Reihe nach die Werthe $0, 1, \ldots N$, so ergeben sich die vollständigen Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems P.

II.

Da das relative Gleichgewicht von P der Voraussetzung gemäss stabil ist, so kann man seinen Punkten so kleine relative Ortsänderungen und Geschwindigkeiten ertheilen, dass dieselben in der nachfolgenden Bewegung unaufhörlich innerhalb beliebig enge gewählter Grenzen beharren.

Man kann also bewirken, dass jede relative Ortsänderung fortwährend unendlich klein bleibt. Dann lassen sich die beschleunigenden Kräfte in jedem Augenblicke durch die Ortsänderungen linear ausdrücken. Folglich sind die Bewegungen in unendlich kleinen relativen Ortsänderungen superponirbar.

Bezeichnet man zur Zeit t die zu den Axen parallelen Verschiebungen

$$(2.) \quad \begin{cases} \text{des Punktes } m^i_{ll'l''} \text{ durch } \xi^i_{ll'l''}=\xi_i,\ \eta^i_{ll'l''}=\eta_i,\ \zeta^i_{ll'l''}=\zeta_i, \\ \text{des Punktes } m^k_{l+n,l'+n',l''+n''} \text{ durch } \xi_k',\ \eta_k',\ \zeta_k', \end{cases}$$

so erhält man aus den Gleichungen (1.) die am Punkte $m^i_{l'l''n''}$ zur Zeit t wirkenden Componenten, wenn man auf der rechten Seite überall und für jedes k x'_k-x_i, y'_k-y_i, z'_k-z_i durch $x'_k-x_i+\xi'_k-\xi_i$, $y'_k-y_i+\eta'_k-\eta_i$, $z'_k-z_i+\zeta'_k-\zeta_i$ ersetzt, also x'_k, y'_k, z'_k bezüglich um $\xi'_k-\xi_i$, $\eta'_k-\eta_i$, $\zeta'_k-\zeta_i$ wachsen lässt.

Daraus ergeben sich die Gleichungen für die superponirbaren Bewegungen des Systems P in folgender Gestalt:

$$(3.)\quad \begin{cases} m^i \dfrac{\partial^2 \xi^i_{l'l''n''}}{\partial t^2} = \sum\limits_{nn'n''} \sum\limits_{k} \left[\dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x'^2_k} (\xi'_k-\xi_i) + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x'_k \partial y'_k} (\eta'_k-\eta_i) + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x'_k \partial z'_k} (\zeta'_k-\zeta_i) \right], \\ m^i \dfrac{\partial^2 \eta^i_{l'l''n''}}{\partial t^2} = \sum\limits_{nn'n''} \sum\limits_{k} \left[\dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x'_k \partial y'_k} (\xi'_k-\xi_i) + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial y'^2_k} (\eta'_k-\eta_i) + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial y'_k \partial z'_k} (\zeta'_k-\zeta_i) \right], \\ m^i \dfrac{\partial^2 \zeta^i_{l'l''n''}}{\partial t^2} = \sum\limits_{nn'n''} \sum\limits_{k} \left[\dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x'_k \partial z'_k} (\xi'_k-\xi_i) + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial y'_k \partial z'_k} (\eta'_k-\eta_i) + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial z'^2_k} (\zeta'_k-\zeta_i) \right]. \end{cases}$$

Dieselben müssen für alle ganzzahligen Werthe von l, l', l'' und für $i=0, 1, \ldots N$ bestehen. Die Bedingung, dass bei den Summationen das Glied $(n=n'=n''=0,\ k=i)$ weggelassen werden soll, braucht jetzt nicht mehr berücksichtigt zu werden, da bei diesen Werthen der Summationsindices die Factoren $\xi'_k-\xi_i$ u. s. w. sich auf Null reduciren.

III.

Seit den Untersuchungen *Cauchy*s über die reticularen Systeme pflegt man den Anfangszustand eines solchen Systems durch stetige Functionen der Coordinaten auszudrücken, welche nicht bloss den materiellen Punkten des Systems, sondern auch den sie umgebenden massenfreien Punkten Anfangsverschiebungen und Geschwindigkeiten anweisen.

Indem man hierauf die Differentialgleichungen der Bewegung auf alle Punkte des Raumes ausdehnt, bestimmt man mittelst des *Fourier*schen Satzes eine Bewegung des continuirlichen Raumes, an welcher die in ihn eingetauchten materiellen Punkte ihrem Orte gemäss theilnehmen.

Bei diesem Verfahren wird die Bewegung des materiellen Punktsystems abhängig gemacht, nicht bloss von seinem eigenen Anfangszustande, was für jeden einzelnen Punkt desselben in irgend einem Umfange der Fall sein muss, sondern auch noch vom Anfangszustande des massenfreien Raumes, was in Wirklichkeit nicht der Fall sein kann. Von diesen, der Lösung nothwendig fremden Elementen kann dieselbe nur durch die Reduction der vielfachen In-

tegrale befreit werden, welche durch den *Fourier*schen Satz eingeführt worden sind.

Um diesen Uebelstand zu vermeiden, geben wir den Anfangszustand des Systems P unmittelbar durch die Verschiebungen und Geschwindigkeiten seiner eigenen Punkte. Sei

$$(4.)\quad \begin{cases} \text{für } t=0, & \xi^i_{ll'l''} = \xi_i = V^{3i}_{ll'l''}, \quad \dfrac{\partial \xi_i}{\partial t} = G^{3i}_{ll'l''}, \\ & \eta^i_{ll'l''} = \eta_i = V^{3i+1}_{ll'l''}, \quad \dfrac{\partial \eta_i}{\partial t} = G^{3i+1}_{ll'l''}, \\ & \zeta^i_{ll'l''} = \zeta_i = V^{3i+2}_{ll'l''}, \quad \dfrac{\partial \zeta_i}{\partial t} = G^{3i+2}_{ll'l''}. \end{cases}$$

Dann lässt sich das zu lösende Problem wie folgt aussprechen:

Es sollen, für alle ganzzahligen Werthe von l, l', l'' und für $i = 0, 1, \ldots N$

$$\xi^i_{ll'l''},\quad \eta^i_{ll'l''},\quad \zeta^i_{ll'l''}$$

als Functionen der Zeit t und der Anfangswerthe V und G den Gleichungen (3.) und (4.) gemäss bestimmt werden.

IV.

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, zu ermitteln, in welcher Weise die gesuchten Functionen von den Anfangswerthen abhängen.

Zu diesem Zwecke lassen wir an Stelle des durch die Gleichung (4.) dargestellten Anfangszustandes einen andern treten, in welchem nur der Punkt

$$m^k_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}$$

in seinem Gleichgewichte gestört worden ist, und auch diesem Punkte nur unendlich kleine Verschiebungen und Geschwindigkeiten ∂V, $\partial V'$, $\partial V''$ und ∂G, $\partial G'$, $\partial G''$ ertheilt worden sind. Aus dieser Gleichgewichtsstörung entspringt eine Bewegung des Systems P, in welchem wir die Verschiebungen des Punktes

$$m^i_{ll'l''}$$

zur Zeit t durch X, Y, Z bezeichnen wollen.

Wir wollen zweitens voraussetzen, dass man zur Zeit $t = 0$, ohne das Gleichgewicht der übrigen Punkte des Systems zu stören, die Verschie-

bungen ∂V, $\partial V'$, $\partial V''$ und die Geschwindigkeiten ∂G, $\partial G'$, $\partial G''$ dem Punkte

$$m^k_{\lambda\lambda'\lambda''}$$

ertheilt habe. Bezeichnet man alsdann in der hieraus erfolgenden Bewegung des Systems P die Verschiebungen des Punktes

$$m^i_{(000)}$$

zur Zeit t durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, so muss wegen der Einrichtung des Systems P

$$X = \mathfrak{X}, \quad Y = \mathfrak{Y}, \quad Z = \mathfrak{Z}$$

sein. In der That werden die im zweiten Falle gemachten Voraussetzungen mit den auf den ersten Fall bezüglichen völlig identisch, wenn man das System P ohne Drehung so lange verschiebt, bis der Punkt $m^k_{\lambda\lambda'\lambda''}$ nach $m^k_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}$ rückt, wobei dann jeder Punkt $m^i_{\lambda\lambda'\lambda''}$ nach $m^i_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}$, und insbesondere $m^i_{(000)}$ nach $m^i_{ll'l''}$ geschoben wird.

Für die Grössen X, $\mathfrak{X}$, Y, ... lassen sich aber leicht bestimmte Ausdrücke finden. Superponirt man nämlich jeden der beiden Anfangszustände, aus denen sie entspringen, mit dem durch die Gleichungen (4.) bestimmten, so werden *im ersten Falle* die Anfangswerthe $(V^{3k}, G^{3k}, V^{3k+1}, \ldots)_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}$ um ∂V, ∂G, $\partial V'$, ..., und in Folge dessen die Verschiebungen $(\xi, \eta, \zeta)^i_{ll'l''}$ um X, Y, Z vermehrt; *im zweiten Falle*, wo die Aenderungen ∂V, ∂G, $\partial V'$, ... den Anfangswerthen $(V^{3k}, G^{3k}, V^{3k+1}, \ldots)_{\lambda\lambda'\lambda''}$ ertheilt werden, ändern sich $(\xi, \eta, \zeta)^i_{(000)}$ um $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

Drückt man demnach die Verschiebungen X, $\mathfrak{X}$, Y, ... durch die Differentiale der Grössen $\xi^i_{ll'l''}$, $\xi^i_{(000)}$, $\eta^i_{ll'l''}$, ... nach den geänderten Anfangswerthen aus, so ergibt sich aus ihrer Gleichheit z. B.

$$X = \frac{\partial \xi^i_{ll'l''}}{\partial V^{3k}_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}} \cdot \partial V + \frac{\partial \xi^i_{ll'l''}}{\partial G^{3k}_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}} \cdot \partial G + \frac{\partial \xi^i_{ll'l''}}{\partial V^{3k+1}_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}} \cdot \partial V' + \cdots$$

$$= \mathfrak{X} = \frac{\partial \xi^i_{(000)}}{\partial V^{3k}_{\lambda\lambda'\lambda''}} \cdot \partial V + \frac{\partial \xi^i_{(000)}}{\partial G^{3k}_{\lambda\lambda'\lambda''}} \cdot \partial G + \frac{\partial \xi^i_{(000)}}{\partial V^{3k+1}_{\lambda\lambda'\lambda''}} \cdot \partial V' + \cdots,$$

und allgemein, wenn man einen der Buchstaben ξ, η, ζ durch (ξ, η, ζ), und einen der Buchstaben V, G durch (V, G) bezeichnet

$$(5.) \qquad \frac{\partial (\xi, \eta, \zeta)^i_{ll'l''}}{\partial (V, G)^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}} = \frac{\partial (\xi, \eta, \zeta)^i_{(000)}}{\partial (V, G)^j_{\lambda\lambda'\lambda''}},$$

für $i = 0, 1, \ldots N$, $j = 0, 1, \ldots 3N+2$, und alle ganzzahligen Werthe von λ, λ', λ'', l, l', l''.

Wir setzen von jetzt an

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi^i_{000}}{\partial V^j_{\lambda\lambda'\lambda''}} = R^{3i,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, & \dfrac{\partial \eta^i_{000}}{\partial V^j_{\lambda\lambda'\lambda''}} = R^{3i+1,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, & \dfrac{\partial \zeta^i_{000}}{\partial V^j_{\lambda\lambda'\lambda''}} = R^{3i+2,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, \\ \dfrac{\partial \xi^i_{000}}{\partial G^j_{\lambda\lambda'\lambda''}} = S^{3i,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, & \dfrac{\partial \eta^i_{000}}{\partial G^j_{\lambda\lambda'\lambda''}} = S^{3i+1,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, & \dfrac{\partial \zeta^i_{000}}{\partial G^j_{\lambda\lambda'\lambda''}} = S^{3i+2,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, \end{cases}$$

und werden im folgenden art. zeigen, wie sich die Bestimmung der Functionen ξ, η, ζ vollständig auf die Ermittlung der Functionen R und S zurückführen lässt.

V.

Zunächst ergiebt sich aus den für $t=0$ stattfindenden Gleichungen $\xi^i_{000} = V^{3i}_{000}$, $\dfrac{\partial \xi^i_{000}}{\partial t} = G^{3i}_{000}$, $\eta^i_{000} = V^{3i+1}_{000}$, u. s. w. mit Hülfe der Gleichungen (6.), dass für $t=0$, mit einziger Ausnahme von

$$R^{j,j}_{000} \quad \text{und} \quad \frac{\partial S^{j,j}_{000}}{\partial t} \quad (j = 0, 1, \ldots 3N+2),$$

welche gleich 1 werden, alle übrigen Functionen R, S, $\dfrac{\partial R}{\partial t}$, $\dfrac{\partial S}{\partial t}$ verschwinden.

Ferner erhält man aus den Gleichungen (3.), indem man sie nach einem Anfangswerthe differentiirt, mit Hülfe der Gleichungen (5.) Differentialgleichungen, denen die Functionen R und S genügen müssen.

Beachtet man, dass nach (5.) und (6.) auf Grund der in art. II. eingeführten Bezeichnung

$$\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)^i_k}{\partial(V,G)^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}} = \frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)^k_{l+n,l'+n',l''+n''}}{\partial(V,G)^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}} = \frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)^k_{000}}{\partial(V,G)^j_{\lambda-n,\lambda'-n',\lambda''-n''}}$$

$$= (P^{3k,j}, P^{3k+1,j}, P^{3k+2,j})_{\lambda-n,\lambda'-n',\lambda''-n''},$$

$$\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)_i}{\partial(V,G)^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}} = (P^{3i,j}, P^{3i+1,j}, P^{3i+2,j})_{\lambda\lambda'\lambda''}$$

ist, wo P durch R oder S zu ersetzen ist, jenachdem man nach V oder G differentiirt, so erkennt man sofort, dass man, um die Gleichungen (3.) nach $(V,G)^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}$ zu differentiiren, nur nöthig hat, dort überall

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i \quad \text{durch} \quad P^{3i,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, P^{3i+1,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, P^{3i+2,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}$$

und die Differenzen

$$\xi_k' - \xi_i, \qquad \eta_k' - \eta_i, \qquad \zeta_k' - \zeta_i$$

durch

$$P^{3k,j}_{\lambda-n,\lambda'-n',\lambda''-n''} - P^{3i,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mathfrak{P}^{3k,3i}$$

$$P^{3k+1,j}_{\lambda-n,\lambda'-n',\lambda''-n''} - P^{3i+1,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mathfrak{P}^{3k+1,3i+1}$$

$$P^{3k+2,j}_{\lambda-n,\lambda'-n',\lambda''-n''} - P^{3i+2,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mathfrak{P}^{3k+2,3i+2}$$

zu ersetzen.

Behält man diese Bezeichnung zur Abkürzung bei, so ergiebt sich also

$$(7.)\quad \begin{cases} m^i \dfrac{\partial^2 P^{3i,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}}{\partial t^2} = \sum_{nn'n''} \sum_k \left[\dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x_k'^2} \mathfrak{P}^{3k,3i} + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x_k' \partial y_k'} \mathfrak{P}^{3k+1,3i+1} + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x_k' \partial z_k'} \mathfrak{P}^{3k+2,3i+2} \right], \\ m^i \dfrac{\partial^2 P^{3i+1,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}}{\partial t^2} = \sum_{nn'n''} \sum_k \left[\dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x_k' \partial y_k'} \mathfrak{P}^{3k,3i} + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial y_k'^2} \mathfrak{P}^{3k+1,3i+1} + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial y_k' \partial z_k'} \mathfrak{P}^{3k+2,3i+2} \right], \\ m^i \dfrac{\partial^2 P^{3i+2,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}}{\partial t^2} = \sum_{nn'n''} \sum_k \left[\dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x_k' \partial z_k'} \mathfrak{P}^{3k,3i} + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial y_k' \partial z_k'} \mathfrak{P}^{3k+1,3i+1} + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial z_k'^2} \mathfrak{P}^{3k+2,3i+2} \right]. \end{cases}$$

Fügt man zu diesen Gleichungen die Bedingung, dass

für $t = 0$ und $j = 0, 1, \ldots 3N+2$

$$(8.)\qquad P^{j,j}_{000} = \mathfrak{A}^j, \qquad \frac{\partial P^{j,j}_{000}}{\partial t} = \mathfrak{B}^j$$

werde, und alle übrigen Functionen P und $\dfrac{\partial P}{\partial t}$ verschwinden,

so wird offenbar

I. $P = R$, wenn man alle $\mathfrak{A}^j = 1$, alle $\mathfrak{B}^j = 0$ setzt;

II. $P = S$, wenn man alle $\mathfrak{A}^j = 0$, alle $\mathfrak{B}^j = 1$ setzt,

gleiche Indices bei P, R und S vorausgesetzt.

Diese Bedingungen zeigen, was auch für sich klar ist, dass die Functionen R und S von den Anfangswerthen V und G unabhängig sind; also sind (5. und 6.) die Verschiebungen ξ, η und ζ lineare Functionen derselben. Da diese Functionen verschwinden, wenn man alle Anfangswerthe auf Null reducirt, so erhält man aus den Gleichungen (5.) und (6.)

$$(9.)\quad \begin{cases} \xi^i_{ll'l''} = \sum_{\lambda\lambda'\lambda''} \sum_j [R^{3i,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} V^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''} + S^{3i,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} G^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}], \\ \eta^i_{ll'l''} = \sum_{\lambda\lambda'\lambda''} \sum_j [R^{3i+1,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} V^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''} + S^{3i+1,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} G^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}], \\ \zeta^i_{ll'l''} = \sum_{\lambda\lambda'\lambda''} \sum_j [R^{3i+2,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} V^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''} + S^{3i+2,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} G^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}], \end{cases}$$

wo von den beiden Summationen sich die erste über alle ganzzahligen Werthe von λ, λ', λ'', und die zweite sich über die Werthe $j = 0, 1, 2, \ldots 3N+2$ erstreckt.

VI.

Man kann eine Particularlösung der Gleichungen (7.) finden, indem man jede Function $P_{\lambda\lambda'\lambda''}$ zur Exponentialgrösse $e^{(\lambda u+\lambda' u'+\lambda'' u'')\sqrt{-1}}$ proportional setzt, wobei u, u', u'' Constanten bedeuten, welche willkürlich bleiben. Durch Superposition solcher Particularlösungen muss man hierauf den Anfangsbedingungen (8.) Genüge leisten.

In Folge der besondern Beschaffenheit dieser Anfangsbedingungen ist es leicht, im Voraus das Resultat der eben bezeichneten Superposition zu erkennen. Es sei Ω eine Function der Variabeln t, u, u', u'', welche ebenso wie ihre erste Derivirte $\frac{\partial\Omega}{\partial t}$ für $t = 0$ von u, u', u'' unabhängig wird. Entwickelt man diese beiden Functionen für alle zwischen $-\pi$ und π enthaltenen Werthe von u, u', u'' nach Exponentialgrössen $e^{(\lambda u+\lambda' u'+\lambda'' u'')\sqrt{-1}}$, so verschwinden für $t = 0$ alle Coefficienten in diesen Entwicklungen bis auf diejenigen, welche der Voraussetzung $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 0$ entsprechen. Dies ist genau die von den Functionen $P_{\lambda\lambda'\lambda''}$ verlangte Eigenschaft. Wir setzen demnach

$$(10.) \qquad P^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \Omega^{hj} e^{(\lambda u+\lambda' u'+\lambda'' u'')\sqrt{-1}}\,\partial u\,\partial u'\,\partial u'',$$

wo jede Integration zwischen den Grenzen $-\pi$ und π auszuführen ist.

Dann verlangen die Anfangsbedingungen (8.), dass man für $t = 0$ habe

$$(11.) \qquad \Omega^{jj} = \mathfrak{A}^j, \quad \frac{\partial\Omega^{jj}}{\partial t} = \mathfrak{B}^j, \quad \Omega^{hj} = 0, \quad \frac{\partial\Omega^{hj}}{\partial t} = 0,$$

wenn h von j verschieden ist.

Ferner ergiebt sich aus (10.)

$$P^{hj}_{\lambda-n,\lambda'-n',\lambda''-n''} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \Omega^{hj} e^{(\lambda u+\ldots)\sqrt{-1}}\cdot e^{-(nu+\ldots)\sqrt{-1}}\,\partial u\,\partial u'\,\partial u''.$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die Gleichungen (7.) ein, und bedienen uns folgender abkürzenden Bezeichnung:

$$e^{-(nu+n'u'+n''u'')\sqrt{-1}} = \omega,$$

(12.) ferner *in der ersten Gleichung:*

$$\sum_{nn'n''}\sum_{k=0}^{k=N}\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k^2}-\sum_{nn'n''}\frac{\partial^2[ii]}{\partial x_i^2}\cdot\omega=(3i,3i),\qquad -\sum_{nn'n''}\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k^2}\cdot\omega=(3i,3k),$$

$$\Sigma\,\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial y_k'}-\Sigma\frac{\partial^2[ii]}{\partial x_i'\partial y_i'}\cdot\omega=(3i,3i+1),\qquad -\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial y_k'}\cdot\omega=(3i,3k+1),$$

$$\Sigma\,\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial z_k'}-\Sigma\frac{\partial^2[ii]}{\partial x_i'\partial z_i'}\cdot\omega=(3i,3i+2),\qquad -\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial z_k'}\cdot\omega=(3i,3k+2),$$

in der zweiten

$$\Sigma\,\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial y_k'}-\Sigma\frac{\partial^2[ii]}{\partial x_i'\partial y_i'}\cdot\omega=(3i+1,3i),\qquad -\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial y_k'}\cdot\omega=(3i+1,3k),$$

$$\Sigma\,\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'^2}-\Sigma\frac{\partial^2[ii]}{\partial y_i'^2}\cdot\omega=(3i+1,3i+1),\qquad -\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'^2}\cdot\omega=(3i+1,3k+1),$$

$$\Sigma\,\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'\partial z_k'}-\Sigma\frac{\partial^2[ii]}{\partial y_i'\partial z_i'}\cdot\omega=(3i+1,3i+2),\qquad -\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'\partial z_k'}\cdot\omega=(3i+1,3k+2),$$

und in der dritten

$$\Sigma\,\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial z_k'}-\Sigma\frac{\partial^2[ii]}{\partial x_i'\partial z_i'}\cdot\omega=(3i+2,3i),\qquad -\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial z_k'}\cdot\omega=(3i+2,3k),$$

$$\Sigma\,\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'\partial z_k'}-\Sigma\frac{\partial^2[ii]}{\partial y_i'\partial z_i'}\cdot\omega=(3i+2,3i+1),\qquad -\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'\partial z_k'}\cdot\omega=(3i+2,3k+1),$$

$$\Sigma\,\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial z_k'^2}-\Sigma\frac{\partial^2[ii]}{\partial z_i'^2}\cdot\omega=(3i+2,3i+2),\qquad -\Sigma\frac{\partial^2[ik]}{\partial z_k'^2}\cdot\omega=(3i+2,3k+2),$$

wo die Gleichungen der zweiten Verticalreihe k und i als von einander verschieden voraussetzen.

Unterscheidet man in den Gleichungen (7.) die beiden Fälle, wo $k=i$ oder k von i verschieden ist, so erkennt man, dass dieselben sich mit Hülfe der vorstehenden Bezeichnungen in die folgenden verwandeln, in denen

$$\frac{1}{(2\pi)^3}e^{(\lambda u+\lambda' u'+\lambda'' u'')V-1}du\,du'\,du''=\partial E_{\lambda\lambda'\lambda''}$$

gesetzt ist:

$$0=\int\partial E^{\lambda\lambda'\lambda''}\left[m^i\frac{\partial^2\Omega^{3i,j}}{\partial t^2}+\sum_k\left((3i,3k)\Omega^{3k,j}+(3i,3k+1)\Omega^{3k+1,j}+(3i,3k+2)\Omega^{3k+2,j}\right)\right],$$

$$0=\int\partial E_{\lambda\lambda'\lambda''}\left[m^i\frac{\partial^2\Omega^{3i+1,j}}{\partial t^2}+\sum_k\left((3i+1,3k)\Omega^{3k,j}+(3i+1,3k+1)\Omega^{3k+1,j}+(3i+1,3k+2)\Omega^{3k+2,j}\right)\right],$$

$$0=\int\partial E_{\lambda\lambda'\lambda''}\left[m^i\frac{\partial^2\Omega^{3i+2,j}}{\partial t^2}+\sum_k\left((3i+2,3k)\Omega^{3k,j}+(3i+2,3k+1)\Omega^{3k+1,j}+(3i+2,3k+2)\Omega^{3k+2,j}\right)\right],$$

wo k bei der Summation die Werthe 0, 1, ... N durchläuft.

Diese Gleichungen müssen für alle ganzzahligen Werthe von λ, λ', λ'' bestehen. Da aber die in den eckigen Klammern stehenden Functionen von λ, λ', λ'' unabhängig sind, so ergiebt sich aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, dass sie gleich Null sein müssen für alle zwischen $-\pi$ und π liegenden Werthe von u, u', u'', d. h. für alle Werthe, welche diese Variabeln während der Integration durchlaufen.

Jede der vorstehenden Gleichungen liefert also eine Differentialgleichung zwischen den einzelnen Functionen Ω. Setzt man der Symmetrie wegen in der ersten $m^i = \mu_{3i}$, in der zweiten $m^i = \mu_{3i+1}$, in der dritten $m^i = \mu_{3i+2}$, so dass man für $i = 0, 1, \ldots N$ hat

$$(13.) \qquad \mu_{3i} = \mu_{3i+1} = \mu_{3i+2} = m^i,$$

so treten diese Gleichungen sämmtlich in die nämliche Form; man erhält für

$$h, j = 0, 1, \ldots 3N+2$$

$$(14.) \qquad \mu_h \frac{\partial^2 \Omega^{hj}}{\partial t^2} + \sum_{g=0}^{g=3N+2} (hg)\, \Omega^{gj} = 0.$$

Auf diese Weise ist das ursprüngliche Problem auf die Integration des vorstehenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Rücksicht auf die in (11.) gestellten Anfangsbedingungen zurückgeführt. Zu dieser Integration sind indessen einige Vorbereitungen erforderlich.

VII.

Vor Allem ist es nothwendig, gewisse Eigenschaften der Coefficienten (hg) festzustellen.

Zunächst ergiebt sich aus ihrer Entstehung, dass sie nicht bloss von der Zeit t unabhängig sind, sondern auch von der Stelle, welche der Punkt $m^i_{\mu\mu'\mu''}$ im System Π_i oder P einnimmt.

Eine zweite Eigenschaft ergiebt sich unmittelbar aus den Gleichungen (12.). Sie ist in der Gleichung

$$(3i+\chi, 3k+\varrho) = (3i+\varrho, 3k+\chi)$$

enthalten, wenn ϱ und χ nach Belieben aus den Zahlen 0, 1, 2 ausgewählt werden.

Die dritte Eigenschaft, deren Kenntniss nothwendig ist, besteht darin, dass die beiden Grössen (gh) und (hg), welche im Allgemeinen complexe Werthe haben, stets zu einander conjugirt sind.

Zum Beweise dieser Behauptung werden wir in den Ausdrücken der verschiedenen Grössen (gh) die Vorzeichen der Indices n, n', n'' ändern, was auf den Werth dieser Ausdrücke offenbar keinen Einfluss hat.

Dann erkennt man zunächst leicht, dass die Grössen $(3i+\chi, 3i+\varrho)$ sämmtlich reell sind. Da ausserdem $(3i+\chi, 3i+\varrho) = (3i+\varrho, 3i+\chi)$ ist, so wird in diesem Falle der obigen Behauptung nicht widersprochen.

Wir wollen nun unter der Voraussetzung, dass k von i verschieden ist, die beiden Factoren untersuchen, welche im Ausdrucke von $(3i+\chi, 3k+\varrho)$ unter dem Summenzeichen stehen.

Da man nach art. I. und II.

$$x_k'-x_i = \alpha_k-\alpha_i+an+a'n'+a''n'', \qquad x_i'-x_k = \alpha_i-\alpha_k+an+\cdots$$

hat, und ähnliche Gleichungen für die anderen Coordinatendifferenzen gelten, so folgt, dass $x_k'-x_i$, $y_k'-y_i$, $z_k'-z_i$ durch Aenderung des Vorzeichens von n, n', n'' in $-(x_i'-x_k)$, $-(y_i'-y_k)$, $-(z_i'-z_k)$ verwandelt werden. Gleichzeitig gehen also die Ausdrücke

$$\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'^2}, \quad \frac{\partial^2[ik]}{\partial y_k' \partial z_k'} \text{ u. s. w. über in } \frac{\partial^2[ki]}{\partial x_i'^2}, \quad \frac{\partial^2[ki]}{\partial y_i' \partial z_i'} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt, dass in den Gleichungen (12.) der Zeichenwechsel der Indices n, n', n'' nur zur Folge hat, dass auf der linken Seite 1) die Zahlen i und k vertauscht werden, und 2) in der Exponentialgrösse $\omega = e^{-(nu+\cdots)\sqrt{-1}}$ die $\sqrt{-1}$ das entgegengesetzte Zeichen erhält. Dadurch wird aber die Grösse $(3i+\chi, 3k+\varrho)$ ohne Aenderung ihres Werthes in die Conjugirte von $(3k+\chi, 3i+\varrho) = (3k+\varrho, 3i+\chi)$ verwandelt, w. z. b. w.

Man kann endlich noch eine vierte Eigenschaft dieser Grössen (gh) bemerken; dieselben sind nämlich in Bezug auf jede der drei Variabeln u, u', u'' periodisch, mit der Periode 2π. Daraus zieht man leicht den Schluss, dass die durch die Gleichungen (11.) und (14.) bestimmten Functionen Ω die nämliche Periodicität darbieten müssen.

VIII.

Setzt man

$$\psi^j = \sum_{g,h} (hg)\, \Omega^{gj} H^h, \qquad \varphi^j = \sum_h \mu_h \Omega^{hj} H^h,$$

so kann man die Gleichungen (14.) in folgende Form bringen:

$$(15.) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial H^h}\right) + \frac{\partial \psi^j}{\partial H^h} = 0, \qquad h = 0, 1, \ldots 3N+2.$$

Da diese Gleichungen linear, und ihre Coefficienten constant sind, so hängt ihre Integration, wie bekannt, nur von der Untersuchung der Determinante der bilinearen Function

$$\psi^j - x\varphi^j$$

und ihrer Unterdeterminanten ab.

Vergleicht man aber die Ausdrücke der Functionen ψ^j und φ^j mit denjenigen, welche in der Abhandlung über die Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn *Weierstrass* (p. 255 dieses Bandes) durch ψ und φ bezeichnet wurden, so erkennt man sofort, dass die dort gemachten Voraussetzungen im gegenwärtigen Falle erfüllt sind.

Setzt man nämlich $[hh] = \mu_h$ und, so lange g von h verschieden ist, $[gh] = 0$, so wird

$$\varphi^j = \Sigma [hg] \Omega^{gj} H^h,$$

und es sind nun (gh) und (hg), sowie $[gh]$ und $[hg]$ zu einander conjugirt, wie dort verlangt wurde. Setzt man ferner $\Omega^{hj} = x_h + iy_h$, $H^h = x_h - iy_h$, so wird $\varphi^j = \Sigma \mu_h (x_h^2 + y_h^2)$. Dies kann, da sämmtliche μ als Massen materieller Punkte positiv sind, nur verschwinden, wenn alle reellen Variabeln x und y sich zugleich auf Null reduciren.

Bezeichnet man daher durch

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} (00) - \mu x & (01) & \dots \\ (10) & (11) - \mu_1 x & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

die Determinante von $\psi^j - x\varphi^j$, und durch $\Delta_{ik}(x)$ die aus einer Aenderung des Elementes (ik) entspringende Unterdeterminante von $\Delta(x)$, so folgt

I. dass alle Wurzeln der Gleichung $\Delta(x) = 0$ reell sind.

Bezeichnet man die von einander verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung $3N+3^{\text{ten}}$ Grades durch

$$s^2, \quad s_1^2, \quad \dots \quad s_p^2,$$

so folgt weiter,

II. dass man durch Zerfällung in Partialbrüche

$$\frac{\Delta_{ik}(x)}{\Delta(x)} = \sum_\delta \frac{A_{ik}^\delta}{s_\delta^2 - x}$$

erhält, wo die Factoren A von x unabhängig sind, und die Summation sich über die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Delta(x) = 0$ erstreckt.

Endlich zieht man aus den Gleichungen (9.) der angeführten Abhandlung für den vorliegenden Fall die folgenden:

$$\text{(III.)} \quad \begin{cases} \Omega^{gj} = \sum_{\delta} \sum_{h} A^{\delta}_{gh} \dfrac{\partial \varphi^j}{\partial H^h}, \\ \sum_{h} A^{\delta}_{gh} \dfrac{\partial \psi^j}{\partial H^h} = s_\delta^2 \sum_{h} A^{\delta}_{gh} \dfrac{\partial \varphi^j}{\partial H^h}, \end{cases}$$

welche bei jeder Bedeutung der Grössen Ω^{0j}, Ω^{1j}, ... stattfinden.

Setzt man also

$$\text{(16.)} \quad \sum_{h} A^{\delta}_{gh} \frac{\partial \varphi^j}{\partial H^h} = \sum_{h} \mu_h A^{\delta}_{gh} \Omega^{hj} = \Omega^{gj\,\delta},$$

so folgt aus den Gleichungen (III.)

$$\text{(17.)} \quad \begin{cases} \Omega^{gj} = \sum_{\delta} \Omega^{gj\delta}, \\ \sum_{h} A^{\delta}_{gh} \dfrac{\partial \psi^j}{\partial H^h} = s_\delta^2 \Omega^{gj\delta}. \end{cases}$$

Dies festgestellt, multipliciren wir die Gleichung (15.) mit A^{δ}_{gh}, und addiren hierauf die aus ihr für $h = 0, 1, \ldots 3N+2$ entspringenden Gleichungen zu einander; dann folgt

$$\frac{\partial^2 \Omega^{gj\delta}}{\partial t^2} + s_\delta^2 \Omega^{gj\delta} = 0.$$

Da man aus (16.) und (11.) für $t = 0$

$$\Omega^{gj\delta} = \mu_j A^{\delta}_{gj} \mathfrak{A}^j, \quad \frac{\partial \Omega^{gj\delta}}{\partial t} = \mu_j A^{\delta}_{gj} \mathfrak{B}^j$$

erhält, so ist also für ein beliebiges t

$$\Omega^{gj\delta} = \mu_j A^{\delta}_{gj} \left[\mathfrak{A}^j \cos s_\delta t + \mathfrak{B}^j \frac{\sin s_\delta t}{s_\delta} \right],$$

mithin, wegen der Gleichung (17.)

$$\Omega^{gj} = \mu_j \sum_{\delta} A^{\delta}_{gj} \left[\mathfrak{A}^j \cos s_\delta t + \mathfrak{B}^j \frac{\sin s_\delta t}{s_\delta} \right].$$

IX.

Aus dem eben gefundenen Ausdrucke der Functionen Ω ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichung (10.), dass man, wenn

$$\text{(18.)} \quad \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\delta} \int A^{\delta}_{jh} \frac{\sin s_\delta t}{s_\delta} e^{(\lambda u + \lambda' u' + \lambda'' u'')\sqrt{-1}}\, \partial u\, \partial u'\, \partial u'' = T^{hj}_{\lambda \lambda' \lambda''}$$

$$-\pi < u,\ u',\ u'' < \pi$$

gesetzt wird,

$$P^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mu_j\left[\mathfrak{A}^j\frac{\partial T^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''}}{\partial t} + \mathfrak{B}^j\, T^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''}\right]$$

erhält. Da ferner (art. V, I und II) P gleich R oder S ist, je nachdem man für jedes j $\mathfrak{A}^j = 1$, $\mathfrak{B}^j = 0$ oder $\mathfrak{A}^j = 0$, $\mathfrak{B}^j = 1$ setzt, so folgt:

$$R^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mu_j\frac{\partial T^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''}}{\partial t}, \quad S^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mu_j T^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''}.$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke erhält man aus den Gleichungen (9.) die Lösung des vorgelegten Problems. Sei zur besseren Uebersicht für $\varrho = 0, 1, 2$

$$(19.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\lambda\lambda'\lambda''}\sum\limits_{j=0}^{j=3N+2} \mu_j V^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''} T^{3i+\varrho,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mathfrak{V}^{i,\varrho}_{lll''}, \\ \sum\limits_{\lambda\lambda'\lambda''}\sum\limits_{j=0}^{j=3N+2} \mu_j G^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''} T^{3i+\varrho,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mathfrak{G}^{i,\varrho}_{lll''}, \end{cases}$$

so folgt:

$$(20.)\quad \begin{cases} \xi^i_{lll''} = \mathfrak{G}^{i,0}_{lll''} + \dfrac{\partial \mathfrak{B}^{i,0}_{lll''}}{\partial t}, \\ \eta^i_{lll''} = \mathfrak{G}^{i,1}_{lll''} + \dfrac{\partial \mathfrak{B}^{i,1}_{lll''}}{\partial t}, \\ \zeta^i_{lll''} = \mathfrak{G}^{i,2}_{lll''} + \dfrac{\partial \mathfrak{B}^{i,2}_{lll''}}{\partial t}. \end{cases}$$

Die Einfachheit dieser Formeln lässt nichts zu wünschen übrig. Es scheint indessen schwer zu sein, aus ihnen unmittelbar eine Vorstellung von der durch sie dargestellten Bewegung zu gewinnen. Dagegen bieten sie für angenäherte Bestimmungen eine völlig zuverlässige Grundlage dar, bei welcher es nicht, wie bei der directen Behandlung der ursprünglichen Differentialgleichungen, zu befürchten ist, dass durch wiederholte Vernachlässigungen schliesslich alles verwischt wird, was den Charakter des ursprünglichen Problems ausmacht.

Beitrag zur Theorie des Gleichgewichts eines nicht homogenen flüssigen rotirenden Sphäroids.

(Von Herrn *R. Lipschitz* zu Breslau.)

In einem früheren Aufsatze habe ich die Untersuchungen von *Laplace* über die Gleichgewichtsgestalt einer um eine feste Axe rotirenden, aus sphaeroidischen Schichten bestehenden flüssigen Masse auf einen besonderen Fall angewendet, in welchem für das Dichtigkeitsgesetz eine gewisse drei Constanten enthaltende Function angenommen war *). Eine wiederholte Beschäftigung mit diesem Gegenstande liess mich nun bemerken, dass eine Vereinfachung der Theorie, welche bei jener Anwendung hervorgetreten ist, nicht an der Beschaffenheit der bezüglichen Hypothese für das Dichtigkeitsgesetz haftet, sondern auch bei der Erörterung der allgemeinen Frage durchgeführt werden kann. Unter den für unsere Erde geltenden Bedingungen hat diese Vereinfachung die Folge, dass man immer im Stande ist, nicht allein die Abplattung der Oberfläche, sondern auch noch zwei andere Constanten, die sich auf die Aenderung der Abplattung in den obersten Schichten der Masse beziehen, aus den reinen Thatsachen der Beobachtung zu bestimmen, ohne dass für das Gesetz, nach welchem sich die Dichtigkeit der Masse von Schicht zu Schicht ändert, irgend eine specielle Hypothese gebildet wird. Wenn man die Abplattung irgend einer unendlich dünnen Schicht als Function des Radius einer Kugel auffasst, die mit der betreffenden Fläche gleichen Flächeninhalt hat, und den ersten und den zweiten Differentialquotienten der Abplattung nach diesem Kugelradius nimmt, so sind jene zwei neuen Constanten die Werthe des Products des genannten ersten und zweiten Differentialquotienten für den Kugelradius, welcher der Oberfläche der ganzen Masse entspricht, respective in diesen Kugelradius und in das Quadrat dieses Kugelradius. Diese Ergebnisse in Kürze zu entwickeln ist die Absicht des Vorliegenden.

Um die *Laplace*schen Gleichungen des Problems anzugeben, werde ich die Bezeichnungen ebenso wählen, wie in dem angeführten Aufsatze. Dann ist r die Entfernung eines beliebigen zu fixirenden Punktes von dem Schwerpunkt der rotirenden Masse, ϑ der Winkel, den die Verbindungslinie dieser

*) Bd. LXII, pag. 1 ff.

beiden Punkte mit der einen Hälfte der durch den Schwerpunkt gehenden Rotationsaxe der Masse macht, φ der Winkel, den eine durch jene Verbindungslinie und diese Axe gelegte Ebene mit einer festen Meridianebene bildet. Die rotirende Masse besteht aus unendlich vielen unendlich dünnen homogenen sphäroidischen Schalen, und es bedeutet b den Radius einer Kugel, die mit einem beliebigen solchen Sphäroid gleichen Flächeninhalt hat, $\varrho(b)$ die in demselben Sphäroid herrschende Dichtigkeit der Masse, c den der Oberfläche zugehörigen Werth von b, f die Krafteinheit der Massenanziehung, ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation. Ferner hat man für die Form der Sphäroide die Gleichung

$$(1.) \qquad r = b\left(1+\sum_{2}^{\infty} Y_n(b)\right)$$

und für das Potential der äusseren wirkenden Kräfte die Darstellung

$$(2.) \qquad V = \sum_{2}^{\infty} V_n r^n.$$

Hier sind $Y_n(b)$ und V_n Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung in Bezug auf die Winkel ϑ und φ, und die Kugelfunction $Y_n(b)$ ist in Ansehung ihrer Constanten von dem Parameter b abhängig.

Wenn nun die Function $\varrho(b)$ als gegeben betrachtet wird, so verlangt die Bestimmung der Form der Sphäroide, d. h. die Ermittelung der Kugelfunctionen $Y_n(b)$ nach *Laplace* die Auflösung von zwei Aufgaben. Die erste besteht in der Integration der Differentialgleichung

$$(3.) \qquad \frac{d^2Y_n(b)}{db^2} = \left(\frac{n(n+1)}{b^2} - \frac{2\varrho(b)b}{\int_0^b \varrho(\beta)\beta^2 d\beta}\right)Y_n(b) - \frac{2\varrho(b)b^2}{\int_0^b \varrho(\beta)\beta^2 d\beta}\,\frac{dY_n(b)}{db},$$

die zweite in der Befriedigung der Gleichung

$$(4.) \qquad \begin{cases} -4\pi f Y_n(c)\int_0^c \varrho(\beta)\beta^2 d\beta\,\frac{1}{c} + 4\pi f\int_0^c \varrho(\beta)\,\frac{d(Y_n(\beta)\beta^{n+3})}{d\beta}\,d\beta\,\frac{1}{(2n+1)c^{n+1}} \\ \qquad -\left[\frac{\omega^2}{3}P_2(\cos\vartheta)c^2\right] + V_n c^n = 0, \end{cases}$$

wo der in der eckigen Klammer befindliche Ausdruck nur für $n=2$ gelten soll, und $P_2(\cos\vartheta) = \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{2}$ ist *).

Ich werde jetzt zeigen, dass, sobald die Integration der Differentialgleichung (3.) ausgeführt ist, die Gleichung (4.) sich in eine Form bringen

*) *Laplace* mécanique céleste, Livre III, Chap. IV, No. 29 et 33. Bd. LXII, pag. 8 und 11 dieses Journals.

lässt, bei welcher die Function $Y_n(b)$ nicht mehr unter einem Integralzeichen vorkommt. Multiplicirt man die Gleichung (3.) mit dem Factor

$$b^{n+1}\int_0^b \varrho(\beta)\beta^2 d\beta,$$

so kommt

$$\Big(\frac{d^2 Y_n(b)}{db^2} b^{n+1} - n(n+1) Y_n(b) b^{n-1}\Big)\int_0^b \varrho(\beta)\beta^2 d\beta$$

$$= \Big(-\frac{2d Y_n(b)}{db} b^{n+3} + 2 Y_n(b) b^{n+2}\Big)\varrho(b),$$

und addirt man auf beiden Seiten den Ausdruck

$$\Big(\frac{dY_n(b)}{db} b^{n+3} - (n+1) Y_n(b) b^{n+2}\Big)\varrho(b),$$

so ergiebt sich die Gleichung

$$(5.)\quad \frac{d}{db}\Big\{\Big(\frac{dY_n(b)}{db} b^{n+1} - (n+1) Y_n(b) b^n\Big)\int_0^b \varrho(\beta)\beta^2 d\beta\Big\} = -\frac{d(Y_n(b) b^{n+3})}{db}\varrho(b).$$

Da die Functionen $Y_n(b)$ und $\frac{dY_n(b)}{db}$ im Schwerpunkte der Masse, d. h. für $b=0$, nicht unendlich gross werden dürfen, so kann mit Hülfe der vorstehenden Gleichung der Werth des zweiten in (4.) auftretenden bestimmten Integrals folgendermassen angegeben werden

$$(6.)\quad \int_0^c \varrho(\beta)\frac{d(Y_n(\beta)\beta^{n+3})}{d\beta} d\beta = \Big(-\frac{dY_n(c)}{dc} c^{n+1} + (n+1) Y_n(c) c^n\Big)\int_0^c \varrho(\beta)\beta^2 d\beta.$$

Hiedurch verwandelt sich aber die Gleichung (4.) in die einfachere Relation

$$(7.)\quad -\frac{4\pi f}{c}\int_0^c \varrho(\beta)\beta^2 d\beta \cdot \frac{1}{2n+1}\Big(nY_n(c) + c\frac{dY_n(c)}{dc}\Big) - \Big[\frac{\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta) c^2\Big] + V_n c^n = 0.$$

bei welcher der Behauptung gemäss die Function $Y_n(b)$ unter keinem Integralzeichen steht, und die genau der Gleichung (23.) des oben angeführten Aufsatzes entspricht.

Die so eben abgeleitete Gleichung vertritt die von *Laplace* aufgestellte Gleichung (4.) in ihrem vollen Umfange. Denn die Voraussetzung, unter welcher die Gleichung (6.) eine strenge Folge der Gleichung (5.) ist, besteht darin, dass der Ausdruck $\Big(\frac{dY_n(b)}{db} b^{n+1} - (n+1) Y_n(b) b^n\Big)\int_0^c \varrho(\beta)\beta^2 d\beta$ für alle Werthe b von $b=0$ bis $b=c$ eine endliche und stetige Function von b sei, und diese Voraussetzung ist hier immer erfüllt. Denn auch in dem Falle, dass die Dichtigkeit $\varrho(b)$ in verschiedenen Theilen des Intervalls von 0 bis

c, also etwa von 0 bis b_1, b_1 bis b_2, ... $b_{\varkappa-1}$ bis $b_\varkappa = c$ durch verschiedene analytische Gesetze ausgedrückt ist und an den Grenzen der Intervalle unstetig wird *), bleibt dennoch das Integral $\int_0^b \varrho(\beta)\beta^2 d\beta$ eine endliche und stetige Function von b, weil $\varrho(b)$ überall endlich vorauszusetzen ist, und ist nach der Natur der physikalischen Aufgabe die Integration der Differentialgleichung der Bedingung unterworfen, dass $Y_n(b)$ und $\frac{dY_n(b)}{db}$ überall endlich und stetig sein müssen. Auch zeigt die folgende Ueberlegung sogleich, wie dieser Bedingung zu genügen ist. Denkt man sich die $\varkappa$ Differentialgleichungen gebildet, welche $Y_n(b)$ in den aufgestellten $\varkappa$ Intervallen erfüllen soll, so enthält jedes allgemeine Integral zwei willkürliche Constanten, die linear in dasselbe eingehen. Weil aber nach einer Bemerkung von *Laplace* (für das erste der Intervalle) immer zwei Particularlösungen existiren, deren eine für $b = 0$ gleich Null und deren andere für $b = 0$ unendlich gross wird **), so ist für dieses Intervall nur die eine dieser Particularlösungen anwendbar, und der Ausdruck von $Y_n(b)$ in demselben wird nur *eine* willkürliche Constante enthalten. Nun liefert die Bedingung, dass $Y_n(b)$ und $\frac{dY_n(b)}{db}$ für die Werthe $b = b_1, b_2, \ldots b_{\varkappa-1}$ stetig bleiben sollen, $2(\varkappa-1)$ Gleichungen, und diese reichen gerade zur Bestimmung der $2(\varkappa-1)$ Constanten aus, welche die allgemeinen Ausdrücke von $Y_n(b)$ in den $(\varkappa-1)$ letzten Intervallen involviren. Mithin bleibt in dem Ausdruck für $Y_n(b)$ immer nur *eine* Constante verfügbar, und die Bestimmung derselben durch unsere Gleichung (7.) liefert den gesuchten Werth von $Y_n(b)$.

Wenn man mit *Laplace* annimmt, dass die Resultante aller auf einen Punkt der Oberfläche der Masse wirkenden Kräfte, welche senkrecht gegen die Oberfläche gerichtet ist, bekannt und in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe

$$(8.) \qquad \mathfrak{W}_0 + \sum_2^\infty \mathfrak{W}_n$$

entwickelt sei, so sind die Grössen $Y_n(b)$ durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

---

*) der Fall, dass $\varrho(b)$ in jedem dieser Intervalle einer beliebigen Constante gleich ist, findet sich in *Clairauts* Theorie de la figure de la terre, Seconde partie, Chap. IV. §. LXI behandelt.

**) l. c. n° 30.

$$(9.)\quad \begin{cases} \mathfrak{W}_0 = \dfrac{4\pi f}{c^2}\displaystyle\int_0^c \varrho(\beta)\beta^2 d\beta - \dfrac{2w^2 c}{3}, \\ \mathfrak{W}_n = -\dfrac{8\pi f}{c^2} Y_n(c)\displaystyle\int_0^c \varrho(\beta)\beta^2 d\beta \\ +4\pi f\displaystyle\int_0^c \varrho(\beta)\dfrac{d(Y_n(\beta)\beta^{n+3})}{d\beta} d\beta \dfrac{n+1}{(2n+1)c^{n+2}} + \left[\dfrac{2\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta)c\right] - nc^{n-1}V_n. \end{cases}$$

Multiplicirt man die Gleichung (4.) mit dem Factor $\frac{n}{c}$ und addirt sie zu der zweiten der vorstehenden, so kommt

$$(10.)\quad \mathfrak{W}_n = -\frac{4\pi f}{c^2}\int_0^c \varrho(\beta)\beta^2 d\beta (n+2) Y_n(c) + 4\pi f\int_0^c \varrho(\beta)\frac{d(Y_n(\beta)\beta^{n+3})}{d\beta} d\beta \cdot \frac{1}{c^{n+2}}.$$

Die Gleichung (6.) gestattet auch hier die Ausführung einer Integration, und es entsteht so die Gleichung

$$(11.)\quad \mathfrak{W}_n = -\frac{4\pi f}{c^2}\int_0^c \varrho(\beta)\beta^2 d\beta \left(Y_n(c) + \frac{c\,dY_n(c)}{dc}\right).$$

Für die Grösse $Y_n(c)$ hat man den bekannten Ausdruck

$$(12.)\quad Y_n(c) = \frac{-\left[\frac{5\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta)c\right] + (2n+1)V_n c^{n-1} + \mathfrak{W}_n}{(n-1)\frac{4\pi f}{c^2}\int_0^c \varrho(\beta)\beta^2 d\beta},$$

und die Substitution desselben in (11.) führt zu der neuen Relation

$$(13.)\quad \frac{c\,dY_n(c)}{dc} = \frac{\left[\frac{5\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta)c\right] - (2n+1)V_n c^{n-1} - n\mathfrak{W}_n}{(n-1)\frac{4\pi f}{c^2}\int_0^c \varrho(\beta)\beta^2 d\beta}.$$

Wenn man die mittlere Dichtigkeit der ganzen rotirenden Masse

$$\frac{3\int_0^c \varrho(\beta)\beta^2 d\beta}{c^3} = \xi\varrho(c)$$

setzt, so folgt aus der Differentialgleichung (4.) die Gleichung

$$\frac{c^2 d^2 Y_n(c)}{dc^2} = n(n+1)Y_n(c) - \frac{6}{\xi}\left(Y_n(c) + \frac{c\,dY_n(c)}{dc}\right),$$

indem man daselbst statt b den Werth c setzt. Mit Hülfe von (11.) und (12.) ergiebt sich hieraus die zweite Relation

$$(14.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{c^2 d^2 Y_n(c)}{dc^2} \\ = \dfrac{n(n+1)\left\{-\left[\dfrac{5\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta)\, c\right] + (2n+1) V_n c^{n-1} + \mathfrak{W}_n\right\}}{(n-1)\dfrac{4\pi f}{c^2}\displaystyle\int_0^c \varrho(\beta)\beta^2 d\beta} + \dfrac{6}{\xi}\dfrac{\mathfrak{W}_n}{\dfrac{4\pi f}{c^2}\displaystyle\int_0^c \varrho(\beta)\beta^2 d\beta}. \end{array} \right.$$

Die so eben gefundenen Ausdrücke für $\frac{c\,dY_n(c)}{dc}$ und $\frac{c^2 d^2 Y_n(c)}{dc^2}$ gestatten ebenso wie der Ausdruck (12.) für $Y_n(c)$ die Elimination des Integrals $\int_0^c \varrho(\beta)\beta^2 d\beta$ durch die erste der Gleichungen (9.), mithin die vollständige Befreiung von dem Ausdruck $\varrho(b)$ der Dichtigkeit, wenn man sich die Constante ξ als beobachteten Werth gegeben denkt. Man erhält hiedurch die Gleichungen

$$(15.)\quad \left\{ \begin{array}{l} Y_n(c) = \dfrac{-\left[\dfrac{5\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta)\, c\right] + (2n+1) V_n c^{n-1} + \mathfrak{W}_n}{(n-1)\left(\mathfrak{W}_0 + \dfrac{2\omega^2 c}{3}\right)}, \\ \dfrac{c\,dY_n(c)}{dc} = \dfrac{\left[\dfrac{5\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta)\, c\right] - (2n+1) V_n c^{n-1} - n\mathfrak{W}_n}{(n-1)\left(\mathfrak{W}_0 + \dfrac{2\omega^2 c}{3}\right)}, \\ \dfrac{c^2 d^2 Y_n(c)}{dc^2} = \dfrac{n(n+1)\left\{-\left[\dfrac{5\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta)\, c\right] + (2n+1) V_n c^{n-1} + \mathfrak{W}_n\right\}}{(n-1)\left(\mathfrak{W}_0 + \dfrac{2\omega^2 c}{3}\right)} + \dfrac{6\mathfrak{W}_n}{\xi\left(\mathfrak{W}_0 + \dfrac{2\omega^2 c}{3}\right)}. \end{array} \right.$$

Ich komme jetzt zu der Anwendung der vorstehenden Relationen auf den Fall unserer Erde. Da bei demselben die sämmtlichen Grössen V_n verschwinden, so erhält bekanntlich die Gleichung der Sphäroide die Form

$$r = b\left(1 + Y_2(b)\right) = b\left(1 + \mathfrak{y}(b) P_2(\cos\vartheta)\right)$$

und die Resultante aller auf einen Punkt der Oberfläche wirkenden Kräfte oder der Werth der Schwerkraft geht in den Ausdruck

$$\mathfrak{W}_0 + \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{W}_0 + \mathfrak{w} P_2(\cos\vartheta)$$

über; die Grösse $-\frac{3}{2}\mathfrak{y}(b)$ ist hier die Abplattung des zum Parameter b gehörenden Sphäroids. Indem ich in den Gleichungen (15.) den Werth $n = 2$ einführe, werde ich gleichzeitig, wie es wegen der relativen Grösse der vorkommenden Constanten gestattet ist und bei dem Ausdruck für $Y_n(c)$ zu geschehen pflegt, in den Zählern der drei Ausdrücke den Werth c durch den Werth a der Aequatorialhalbaxe der Oberfläche ersetzen, und im Nenner der-

selben die Grösse $\frac{2\omega^2 c}{3}$ weglassen. So entstehen die Gleichungen

$$(16.)\quad \begin{cases} \mathfrak{y}(c) = \dfrac{-\frac{5\omega^2 a}{3} + \mathfrak{w}}{\mathfrak{W}_0}, \\ \dfrac{c d\mathfrak{y}(c)}{dc} = \dfrac{\frac{5\omega^2 a}{3} - 2\mathfrak{w}}{\mathfrak{W}_0}, \qquad \dfrac{c^2 d^2\mathfrak{y}(c)}{dc^2} = \dfrac{6\left(\frac{-5\omega^2 a}{3} + \mathfrak{w} + \frac{\mathfrak{w}}{\xi}\right)}{\mathfrak{W}_0}. \end{cases}$$

Wie in dem angeführten Aufsatze sollen bei der Ausmittelung der numerischen Werthe die Secunde als Zeiteinheit, die Pariser Linie als Längeneinheit gewählt, und die folgenden Beobachtungsconstanten zu Grunde gelegt werden

$$\omega^2 a = 15{,}03184$$

$$\mathfrak{W}_0 = 4328{,}191 \qquad \mathfrak{w} = 15{,}03183 \qquad \xi = 2{,}23328.$$

Alsdann sind

$$\mathfrak{y}(c) = -0{,}00231534,$$

$$\frac{c d\mathfrak{y}(c)}{dc} = -0{,}00115766 = 0{,}5\,.\,\mathfrak{y}(c),$$

$$\frac{c^2 d^2\mathfrak{y}(c)}{dc^2} = -0{,}00456136 = 1{,}97\,.\,\mathfrak{y}(c)$$

die für den Fall unserer Erde resultirenden Werthe.

Breslau, den 29sten Januar 1864.

De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrariarum, et praecipue earum, quae per variabilis spatium finitum valorum maximorum et minimorum numerum habent infinitum, disquisitio.

(Auctore *R. Lipschitz.*)

Series secundum sinus et cosinus multiplorum anguli cujusdam progredientes, quibus functio unius variabilis arbitraria explicetur, per diversas analyseos disciplinas maximo in usu esse inter omnes earum rerum peritos jam pridem constat. Geometrarum igitur munus esse videbatur, ut latum functionum illarum campum perscrutarentur atque limitem agerent inter eas, quae seriebus trigonometricis evolvi possint, atque eas, quae hanc proprietatem non habeant. Quo munere perfunctus est, ut conatus ab aliis antea factos praetereamus, illustrissimus *Lejeune-Dirichlet* edita commentatione celeberrima, quae inscribitur: „Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données" (Diar. *Crell.* Vol. IV. pag. 157). Permagna quae inde cepit analysis incrementa leviter adumbrare liceat, ut quaestionum a nobis institutarum et hoc libello pertractatarum quae sit vis et natura dilucidius perspiciatur.

Summi viri commentatio ei superstructa est fundamento, quod data functione arbitraria $\varphi(x)$ pro intervallo variabilis x a valore $-\pi$ usque ad valorem $+\pi$ extenso, et formata serie

$$(1.)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\begin{cases}\cos x\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha+\cos 2x\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos 2\alpha\,d\alpha+\cdots\\ \sin x\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha+\sin 2x\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\sin 2\alpha\,d\alpha+\cdots\end{cases}$$

aggregatum ex $2n+1$ primis seriei terminis per integrale definitum

$$(2.)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha-x)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d\alpha$$

exprimitur, et quod, si integrale numero n in infinitum crescente ad certum quendam valorem quam proxime accedat, hic valor nihil est nisi summa seriei (1.) in infinitum protractae. Tota instituitur disquisitio ea conditione, ut functio $\varphi(x)$ per intervallum a $-\pi$ usque ad $+\pi$ extensum sit finita atque finitum numerum solutionum continuitatis et finitum numerum valorum maximorum et minimorum praebeat. Demonstratur autem, quod sequitur,

Theorema I. Quantitatibus g et h explentibus conditiones signis $0 \leqq g < h \leqq \frac{\pi}{2}$ descriptas sit functio $f(\beta)$ a valore $\beta = g$ usque ad valorem $\beta = h$ data semper finita et continua atque aut ita comparata, ut per totum spatium interjectum vel crescat vel immutata maneat, aut ita comparata, ut per totum spatium vel decrescat vel immutata maneat, tum integrale $\int_g^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta$ quantitate positiva k omnem modum excedente certo cuidam valori appropinquat. Qui valor, si quantitas g est positiva, cifrae aequalis, si quantitas g est cifrae aequalis, $= \frac{\pi}{2} f(0)$ evadit.

Ex hoc theoremate sub conditionibus supra dictis concluditur, integrale (2.) numero n in infinitum crescente ad valorem $\frac{1}{2}(\varphi(x-\varepsilon)+\varphi(x+\varepsilon))$ convergere (dum signo ε quantitatem infinite parvam notamus), itaque seriem (1.) esse convergentem, quicunque valor quantitati x assignetur. Leguntur autem in fine commentationis allatae haecce: „Il nous resterait à considérer les cas, où les suppositions que nous avons faites sur le nombre des solutions de continuité et sur celui des valeurs maxima et minima cessent d'avoir lieu. Ces cas singuliers peuvent être ramenés à ceux que nous venons de considérer". Et verbis quibusdam interjectis: „Mais la chose, pour être faite avec toute la clarté qu'on peut désirer exige quelques détails liés aux principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale et qui seront exposés dans une autre note, dans laquelle je m'occuperai aussi de quelques autres propriétés assez remarquables de la série (7.)", quae est series nostra (1.). Quam commentationem nunquam in lucem esse prolatam quum geometris valde dolendum sit, disquisitionum illarum vestigia reperire et repertis ingredi, quantum possimus et valeamus, propositum nobis est. Atque primum quae ex scriptis illustrissimi *Lejeune-Dirichlet* conjungere contigit commemoremus. Habemus enim praeter commentationem supra allatam aliam ejusdem demonstrationis expositionem in repertorio physico a clarissimis *Dove* et *Moser* edito, et commentationem famosam, quae inscribitur: „Sur les séries dont le terme général dépend de

deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données" (Diar. *Crell.* Vol. XVII. pag. 35).

Functiones $\varphi(x)$, quae non satisfaciant conditionibus supra expositis, in tria genera distribui possunt, quum intra spatium a $-\pi$ usque ad $+\pi$ extensum aut valores infinite magnos accipiant, aut infinitum numerum solutionum continuitatis, aut infinitum numerum valorum maximorum et minimorum habeant. Quos tres casus per se quemque ut ita dicam in jus vocare sufficiet, quia duobus vel tribus simul adcitis seriei (1.) species potius quam vis et natura mutatur.

Quibus finibus functio $\varphi(x)$ primis duobus casibus arceatur videbis, dum perpendis conditiones, quibus fit, ut integralia definita, quae in serie (1.) coefficientium partes agunt, certam habeant significationem. Primo enim casu, si quantitates quaedam inter $-\pi$ et $+\pi$ positae signis a et b notantur, necesse est integrale $\int_a^b \varphi(x)dx$ manere functionem finitam et continuam quantitatum a et b *). Sint $c_1, c_2, \ldots c_\mu$ singuli quantitatis x valores, quibus respondent valores functionis x infinite magni, sint $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\mu$ quantitates quamvis exiguae, excidi possunt e spatio a $-\pi$ usque ad $+\pi$ extenso μ intervalla limitibus

$$c_1-\delta_1 \text{ et } c_1+\delta_1, \quad c_2-\delta \text{ et } c_2+\delta_2, \quad \ldots \quad c_\mu-\delta_\mu \text{ et } c_\mu+\delta_\mu$$

inclusa, quae primae speciei intervalla vocamus. Quod vero restat spatium conflatum erit e finito numero intervallorum ad alteram speciem referendorum, per quorum quodque functio $\varphi(x)$ sufficit conditionibus, quae in theoremate I. functioni $f(\beta)$ praescriptae sunt. Casu autem altero, quo functio $\varphi(x)$ in finito spatio inter $-\pi$ et $+\pi$ intermisso infinite multas solutiones continuitatis praebet, si quantitates quaedam inter $-\pi$ et $+\pi$ positae signis a et b notantur, necesse est semper fieri posse, ut inter a et b aliae quantitates r et s interserantur, inter quas functio $\varphi(x)$ finita et continua maneat **). Unde rite ratiocinando sequitur, spatium a $-\pi$ usque ad $+\pi$ extensum in finitum numerum intervallorum discerpi posse, quorum binae species binis primi casus speciebus sint similes. Prioris speciei intervallum quodque finitae sed ad libitum diminuendae est magnitudinis et infinitum solutionum continuitatis continet numerum, quorum

*) Diar. *Crell.* Vol. XVII. pag. 54.
**) Diar. *Crell.* Vol. IV. pag. 169.

intervallorum limites aeque ac supra signis

$$c_1-\delta_1 \text{ et } c_1+\delta_1,\quad c_2-\delta_2 \text{ et } c_2+\delta_2,\quad \ldots\quad c_\mu-\delta_\mu \text{ et } c_\mu+\delta^\mu$$

significamus. Alterius speciei intervallum quodque eam habet indolem, ut per totum intervallum functio $\varphi(x)$ sufficiat conditionibus, quibus in theoremate I. functio $f(\beta)$ adstricta sit. Nunc vero, si convergentiam seriei (1.) dijudicare velis, rei cardo versatur in quaestione instituenda, num integrale (2.) numero n in infinitum crescente certo cuidam valori appropinquet nec ne. Qua in re si quantitati x valor inter $-\pi$ et $+\pi$ situs assignatur quilibet, dummodo nulli quantitatum c_1, c_2, ... c_μ aequalis sit, quantitatibus exiguis δ_1, δ_2, ... δ_μ commode electis tum primo quum altero casu semper effici potest, ut valor ille quantitatis x cadat in intervallum, quod alterius speciei dicimus. Quum autem integrale (2.) extendatur a valore $\alpha=-\pi$ usque ad valorem $\alpha=+\pi$, discerpatur spatium in modum supra expositum, ut integrale fiat aequale aggregato ex integralibus formae ejusdem, quorum limites sint limites intervallorum vel prioris vel alterius speciei appellatorum. Itaque integralia prioris speciei limitibus inclusa ad priorem integralium speciem, alterius speciei limitibus inclusa ad alteram speciem referimus. Prioris speciei integralia quantitatibus δ_1, δ_2, ... δ_μ apte electis ad quamlibet exiguitatem deprimi posse, quicunque valor numero n tribuatur, casu quidem primo ostendit illustrissimus *Lejeune-Dirichlet* Diar. *Crell.* Vol. XVII. pag. 55, casu autem secundo ei innititur fundamento, quod integralium quodcunque est aggregatum ex infinite multis integralibus ita constitutis, ut aggregatum et ipsum quantumvis minuatur. Alterius speciei integralia ita sunt comparata, ut adcito theoremate I. qui sit valor, ad quem quodque in infinitum crescente numero n quam proxime accedat, mox appareat. Unde gignitur, ultra ullum modum crescente numero n, valor integralis (2.) $\frac{1}{2}(\varphi(x-\varepsilon)+\varphi(x+\varepsilon))$ (ubi signo ε quantitatem infinite parvam denotamus), qui est summa seriei (1.) in infinitum protractae aequalis; atque patet, sub conditionibus supra dictis seriem nostram esse convergentem pro quovis valore quantitatis x inter $-\pi$ et $+\pi$ posito, exceptis valoribus c_1, c_2, ... c_μ. Neque vero negandum singulis quibusdam casibus fieri posse, ut series (1.) etiam pro quibusdam horum valorum certam nanciscatur significationem; quorum casuum investigatione hoc loco supersedemus.

Jam restat, ut de casu tertio agamus, quo functio $\varphi(x)$ in intervallo a $-\pi$ usque ad $+\pi$ extenso est continua, finitum tantum numerum solutionum continuitatis sed infinitum numerum habet valorum minimorum et maximorum. Nulla sane in scriptis illustrissimi *Lejeune-Dirichlet* inveniuntur adjumenta,

quibus ad quaestiones has enodandas via patefiat, nisi haec verba ad omnes tres casus referenda, quae leguntur in commentationum allatarum prima*): „La restriction que je viens de préciser, et celle de ne pas devenir infinie, sont les seules auxquelles la fonction $\varphi(x)$ soit sujette et tous les cas qu'elles n'excluent pas peuvent être ramenés à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède". Qua in re teneas restrictionem hic commemoratam esse eam, quae ad casum alterum nostrum pertineat, neque casum primum (ubi functioni $\varphi(x)$ valores infinite magni competant) antea venisse in disquisitionem quam commentatione illa, quae inscripta est: „Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles etc." Itaque in casum tertium summa qua possumus diligentia inquiramus.

Discrimen sane magnum est inter casus priores et casum tertium, quum casibus illis functio $\varphi(x)$ adstringatur conditionibus, quibus fit, ut integralia definita, quibus coefficientes seriei (1.) exprimuntur, certam teneant significationem, hoc vero casu conditiones eas expletas esse res ipsa indicet. Si enim $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ sunt valores variabilis x, quibus functionis $\varphi(x)$ continuitas deletur, integralium $\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha$ et $\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha$ quodque est aequale aggregato ex integralibus formae ejusdem, quae limitibus $-\pi$ et a_1, a_1 et $a_2, \ldots a_\nu$ et π includuntur, nec dubitari potest, quin singula singulorum aggregatorum integralia ideoque aggregata omnia certam habeant significationem. Nam integralis definiti notio innititur continuitati functionis per intervallum integrationis servatae, neque tollitur, si infinitus numerus valorum maximorum et minimorum in intervallo integrationis finito invenitur. Duobus vero modis omnino diversis accidere potest, ut per finitum variabilis intervallum infinitus sit numerus valorum maximorum et minimorum functioni competentium.

Intervallum enim si limitibus a et b includitur, aut interjicere potes inter a et b quantitates $r-\delta$ et $r+\delta$ eum in finem, ut valorum maximorum et minimorum functioni $\varphi(x)$ competentium numerus sit finitus inter a et $r-\delta$, finitus inter $r+\delta$ et b, infinitus vero inter quantitates $r-\delta$ et $r+\delta$, quantitate positiva finita sed quantumvis deprimenda 2δ inter se distantes; aut res ita se habet, ut quaecunque quantitates r et s in intervallo a $x=a$ usque ad $x=b$ extenso ponantur finita quantitate inter se distantes, finitus valorum maximorum et minimorum numerus inter r et s numquam inveniri possit; aut intervallum

*) Diar. *Crell.* Vol. IV. pag. 169.

datum continet finitum numerum spatiorum finitorum, in quorum quoque aut hoc aut illud eveniat. Brevitatis causa rem ita enuntiemus, ut dicamus, primo casu functionem habere oscillationem pro valore $x=r$, altero autem functionem habere oscillationem per intervallum a $x=a$ usque ad $x=b$ extensum, tertio denique, functionem habere oscillationes et pro singulis valoribus et per spatia quaedam finita variabilis x. Atque oscillationum prorsus diversa esse genera bina perspicimus.

Atque omnibus rebus, quae ad judicium de convergentia seriei (1.) ferendum spectare viderentur perpensis, adminiculo opus esse apparebat, quod in his disquisitionibus locum theorematis I. teneret, majorem vero amplecteretur generalitatem. Itaque, quod proponimus, est hocce

Theorema II. Quantitatibus g et h explentibus conditiones signis $0 \leqq g < h \leqq \frac{\pi}{2}$ denotatas sit functionis $f(\beta)$ indoles ea, ut per intervallum a $\beta = g$ usque ad $\beta = h$ extensum valorem teneat inter valores constantis alicujus tum positive quum negative acceptae positum, ut differentia $f(g+\delta)-f(g)$ decrescente quantitate positiva δ quantumvis exigua evadat, ut differentia $f(\beta+\delta)-f(\beta)$ pro $g<\beta<h$ decrescente quantitate positiva δ valorem assequatur absolute minorem potestate quadam positiva quantitatis δ in aliam constantem ducta; tum integrale $\int_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta$ quantitate positiva k omnem modum excedente certo cuidam valori appropinquat. Qui valor, si quantitas g est positiva, cifrae aequalis, si quantitas g est cifrae aequalis, $=\frac{\pi}{2}f(0)$ prodit.

Cujus propositionis haec adornari potest

Demonstratio. Facillime e commentationibus illustrissimi *Lejeune-Dirichlet* supra commemoratis perspicitur, propositionem nostram veram esse totam, dummodo valeat pars ea, quae ad hypothesin $g=0$ referat, et valeat quidem functione $f(\beta)$ per intervallum a $\beta=0$ usque ad $\beta=h$ extensum semper manente positiva. Qua de re id solum ostendemus, si functio $f(\beta)$ a $\beta=0$ usque ad $\beta=h$ conditionibus $0<f(\beta)<A$ sufficiat, si differentia $f(\delta)-f(0)$ decrescente quantitate positiva δ et ipsa infinite decrescat, si differentia $f(\beta+\delta)-f(\beta)$ pro $0<\beta<h$ decresente quantitate positiva δ valorem nanciscatur absolute minorem valore expressionis $B\delta^\alpha$, ubi signis A, B, α, quantitates quaedam positivae notantur, tum integralis

$$(3.) \qquad S = \int_0^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta$$

proprietatem esse eam, ut in infinitum crescente quantitate positiva k in valorem $\frac{\pi}{2}f(0)$ convergat. Utemur autem significationibus, quibus in commentatione, quae invenitur in repertorio a cl. *Moser* et *Dove* edito, illustrissimus *Lejeune-Dirichlet* usus est, atque formulas quasdam inde depromemus. Quo loco quum quantitas k numero impari $2n+1$ aequalis ponatur (neque enim theorematis II. quidquam interest, et ad posteriorem usum sufficit, restrictionem hanc adhibere) simplicissima via reperitur valor integralis

$$(4.) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin k\beta}{\sin \beta}\, d\beta = \frac{\pi}{2}.$$

Tum si maximum quantitatis $\frac{\pi}{k}$ multiplum, quod quantitate h continetur, vocatur $\frac{r\pi}{k}$, integrale S discerpitur in $(r+1)$ integralia limitibus 0 et $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{k}$ et $\frac{2\pi}{k}$, ... $\frac{r\pi}{k}$ et h inclusa, atque integrale (4.) in integralium ejusmodi limitibus inclusorum certum numerum, ut eveniat

$$(5.) \qquad S = R_1 - R_2 + \cdots + (-1)^r R_{r+1},$$

$$(6.) \qquad R_\nu = (-1)^{\nu-1} \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta,$$

$$(7.) \qquad \frac{\pi}{2} = \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 \pm \cdots,$$

$$(8.) \qquad \varrho_\nu = (-1)^{\nu-1} \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin \beta}\, d\beta.$$

Dein quantitas positiva ϱ_ν limitibus includitur hisce

$$(9.) \qquad \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{\nu\pi}{k}} < \varrho_\nu < \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{(\nu-1)\pi}{k}},$$

et si $2m$ numerum aliquem parem sub quantitate r positum significat, fit

$$(10.) \qquad \begin{cases} \frac{\pi}{2} > \varrho_1 - \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m}, \\ \frac{\pi}{2} < \varrho_1 - \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m} + \varrho_{2m+1}, \end{cases}$$

unde pro quantitate ϱ_1 sequitur

$$(10^a.) \qquad \varrho_1 < \frac{\pi}{2} + \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{k}}.$$

Disquisitionum nostrarum etiam interest animum advertere ad aggregatum ex partibus positivis conflatum

$$\varrho_{\nu+1}+\varrho_{\nu+2}+\cdots+\varrho_{\nu'},$$

ubi $\nu \geqq 1$, $\nu' \leqq r$, atque reperire quantitatem, qua aggregati valor contineatur. Quum in expressione (8.) quantitatis ϱ_ν factor $\sin k\beta$ per integrationis intervallum signum non mutet neque unitatis valorem umquam excedat, habes $\varrho_\nu < \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{d\beta}{\sin\beta}$ ideoque, quae hic desiderabatur, determinationem

$$(11.)\quad \varrho_{\nu+1}+\varrho_{\nu+2}+\cdots+\varrho_{\nu'} < \int_{\frac{\nu\pi}{k}}^{\frac{\nu'\pi}{k}} \frac{d\beta}{\sin\beta} = \log\operatorname{tg}\frac{\nu'\pi}{2k}-\log\operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{2k}.$$

Jam ponamus

$$(12.)\quad \begin{cases} S' = R_1 - R_2 + \cdots + R_{2m-1} - R_{2m}, \\ S'' = R_{2m+1} - R_{2m+2} + \cdots + (-1)^r R_{r+1} \end{cases}$$

ut fiat

$$(13.)\quad S = S' + S'',$$

et videamus, quomodo se habeant aggregata S' et S'' ultra ullum modum crescente numero k. Quem ad finem in formam paullo diversam est redigenda expressio $R_{2t+1}-R_{2t+2}$, quam, si $t < m$, aggregati S', si $t \geqq m$, aggregati S'' partem esse apparet. Introducta in expressionem R_ν nova variabili quantitate $\gamma = k\beta$ fit

$$(14.)\quad R_\nu = (-1)^{\nu-1}\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} f\left(\frac{\gamma}{k}\right)\frac{\sin\gamma}{\sin\frac{\gamma}{k}}\frac{d\gamma}{k} = \int_0^{\pi} f\left(\frac{(\nu-1)\pi+\gamma}{k}\right)\frac{\sin\gamma}{\sin\left(\frac{(\nu-1)\pi+\gamma}{k}\right)}\frac{d\gamma}{k}$$

itaque

$$(15.)\quad R_{2t+1}-R_{2t+2} = \int_0^{\pi}\left(\frac{f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)}{\sin\frac{2t\pi+\gamma}{k}} - \frac{f\left(\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right)}{\sin\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}}\right)\frac{\sin\gamma\, d\gamma}{k}$$

vel potius

$$(16.)\quad \begin{cases} R_{2t+1}-R_{2t+2} \\ = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)+f\left(\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right)\right)\left(\frac{1}{\sin\frac{2t\pi+\gamma}{k}} - \frac{1}{\sin\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}}\right)\frac{\sin\gamma\, d\gamma}{k} \\ + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)-f\left(\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right)\right)\left(\frac{1}{\sin\frac{2t\pi+\gamma}{k}} + \frac{1}{\sin\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}}\right)\frac{\sin\gamma\, d\gamma}{k}. \end{cases}$$

Quorum duorum integralium quoniam factores

$$\frac{1}{\sin\frac{2t\pi+\gamma}{k}}-\frac{1}{\sin\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}} \text{ et } \sin\gamma \text{ et } \frac{1}{\sin\frac{2t\pi+\gamma}{k}}+\frac{1}{\sin\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}}$$

per cursum integrationis positivi manent, integralis prioris valorem, dum loco factoris $f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)+f\left(\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right)$ quantitatem aut majorem aut minorem, atque alterius integralis valorem, dum loco factoris $f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)-f\left(\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right)$ quantitatem aut majorem aut minorem ponas, aestimare poteris. Propositum vero alio modo, si $t<m$, alio modo, si $t\geqq m$ est, consequi oportet.

Priore enim casu sub signis integrationis formula (16.) adhibitis inveniuntur valores functionis $f(\beta)$ tantum ii, qui valoribus β inter $\beta=0$ et $\beta=\frac{2m\pi}{k}$ positis competunt. Quorum valorum secundum hypothesin positivorum et quantitate A superatorum si absolute maximum $f(0)+\lambda$, absolute minimum $f(0)-\mu$ nuncupamus, summam $\frac{1}{2}f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right)$ inter valores $f(0)-\mu$ et $f(0)+\lambda$, differentiam $\frac{1}{2}f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)-\frac{1}{2}f\left(\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right)$ inter valores $\pm\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)$ contineri elucet, unde prodeunt relationes

$$(17.)\quad \begin{cases} t<m;\quad R_{2t+1}-R_{2t+2}<(f(0)+\lambda)(\varrho_{2t+1}-\varrho_{2t+2})+\dfrac{\lambda+\mu}{2}(\varrho_{2t+1}+\varrho_{2t+2}), \\ \qquad\qquad R_{2t+1}-R_{2t+2}>(f(0)-\mu)(\varrho_{2t+1}-\varrho_{2t+2})-\dfrac{\lambda+\mu}{2}(\varrho_{2t+1}+\varrho_{2t+2}). \end{cases}$$

Altero autem casu, ubi $t\geqq m$ assumitur, sub signis integrationis formula (16.) usitatis inveniuntur valores functionis $f(\beta)$ tantum ii, qui valoribus β inter $\beta=\frac{2m\pi}{k}$ et $\beta=h$ positis respondent. Qua in re monemus summam $\frac{1}{2}f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right)$ esse positivam et quantitate A minorem. In aestimanda vero differentia $\frac{1}{2}f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)-\frac{1}{2}f\left(\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right)$, ubi γ valores a $\gamma=0$ usque ad $\gamma=\pi$ omnes percurrit, numerum k tam magnum fingere licet, ut iis, quae de differentia $f(\beta+\delta)-f(\delta)$ posita sint, uti queamus. Quia enim valor absolutus differentiae $f(\beta+\delta)-f(\delta)$, si $0<\beta<h$, decrescente quantitate positiva δ infra quantitatem $B\delta^a$ deprimitur et nostro casu $\frac{2t\pi+\gamma}{k}\geqq\frac{2m\pi}{k}$,

$\delta = \frac{\pi}{k}$ est, differentiam $\frac{1}{2}f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right) - \frac{1}{2}f\left(\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right)$ limitibus $\pm\frac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^a$ inclusam esse apparet. Atque nanciscimur relationes hasce

$$(18.)\quad \begin{cases} t \geqq m; \quad R_{2t+1} - R_{2t+2} < A(\varrho_{2t+1} - \varrho_{2t+2}) + \frac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^a(\varrho_{2t+1} + \varrho_{2t+2}), \\ \qquad\qquad R_{2t+1} - R_{2t+2} > -\frac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^a(\varrho_{2t+1} + \varrho_{2t+2}). \end{cases}$$

Formulae nostrae (17.) et (18.) idoneae sunt, ut limitibus circumdentur aggregatorum S' et S'' partes omnes, si r numero pari $2q$ aequalis est, excepta quantitate R_{r+1}, si r numero impari $2q+1$ aequalis est, excepta expressione $R_r - R_{r+1}$. Quum autem ex iis, quae posita sunt, sequatur $R_r > 0$, $R_{r+1} > 0$, $R_r < A\varrho_r$, $R_{r+1} < A\varrho_{r+1}$, $\varrho_{r+1} < \varrho_r$ dubium esse non potest, quin quantitas R_{r+1}, si $r = 2q$, quantitas $R_r - R_{r+1}$, si $r = 2q+1$, iisdem limitibus $\pm A\varrho_{2q}$ contineatur. Itaque hunc in modum aestimare licet aggregata S' et S''

$$(19.)\quad \begin{cases} S' < (f(0)+\lambda)(\varrho_1 - \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m}) + \frac{\lambda+\mu}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} + \varrho_{2m}), \\ S' > (f(0)-\mu)(\varrho_1 - \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m}) - \frac{\lambda+\mu}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} + \varrho_{2m}), \\ S'' < A(\varrho_{2m+1} - \varrho_{2m+2} + \cdots + \varrho_{2q-1} - \varrho_{2q}) + \frac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^a(\varrho_{2m+1} + \cdots + \varrho_{2q}) + A\varrho_{2q}, \\ S'' > -\frac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^a(\varrho_{2m+1} + \cdots + \varrho_{2q}) - A\varrho_{2q}. \end{cases}$$

Tum ex formulis (9.), (10.), (10^a.), (11.) derivantur sequentes

$$(20.)\quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{2m\pi}{k}} < \varrho_1 - \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m} < \frac{\pi}{2}, \\ \varrho_{2m+1} - \varrho_{2m+2} + \cdots + \varrho_{2q-1} - \varrho_{2q} < \frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{2m\pi}{k}}, \quad \varrho_{2q} < \frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{(2q-1)\pi}{k}}, \\ \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} + \varrho_{2m} < \frac{\pi}{2} + \frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}} + \log\operatorname{tg}\frac{m\pi}{k} - \log\operatorname{tg}\frac{\pi}{2k}, \\ \varrho_{2m+1} + \cdots + \varrho_{2q} < \log\operatorname{tg}\frac{q\pi}{k} - \log\operatorname{tg}\frac{m\pi}{k}, \end{cases}$$

quibus in (19.) substitutis prodeunt novae

$$(21.)\quad \begin{cases} S' < (f(0)+\lambda)\frac{\pi}{2} + \frac{\lambda+\mu}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}} + \log\operatorname{tg}\frac{m\pi}{k} - \log\operatorname{tg}\frac{\pi}{2k}\right) \\ S' > (f(0)-\mu)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{2m\pi}{k}}\right) - \frac{\lambda+\mu}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}} + \log\operatorname{tg}\frac{m\pi}{k} - \log\operatorname{tg}\frac{\pi}{2k}\right) \\ S'' < \frac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\alpha}\left(\log\operatorname{tg}\frac{q\pi}{k} - \log\operatorname{tg}\frac{m\pi}{k}\right) + A\frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{(2q-1)\pi}{k}} + A\frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{2m\pi}{k}} \\ S'' > -\frac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\alpha}\left(\log\operatorname{tg}\frac{q\pi}{k} - \log\operatorname{tg}\frac{m\pi}{k}\right) - A\frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{(2q-1)\pi}{k}}. \end{cases}$$

Quibus relationibus ut concludatur propositionem nostram esse veram, numerum m certum quendam retinere valorem, dum numerus k continuo crescit, ponimus. Quum autem per hypothesin differentia $f(\delta)-f(0)$ decrescente δ quamvis exigua fiat, quum $f(0)+\lambda$ absolute maximus, $f(0)-\mu$ absolute minimus sit valor functionis $f(\beta)$ variabili β spatium a $\beta=0$ usque ad $\beta=\frac{2m\pi}{k}$ percurrente, et quum quantitas $\frac{2m\pi}{k}$ continuo decrescat, quantitates λ et μ facere non possunt, quin et ipsae infinite decrescant. Tum ex notis analyseos principiis sequitur

$$(22.)\quad \begin{cases} \frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}} + \log\operatorname{tg}\frac{m\pi}{k} - \log\operatorname{tg}\frac{\pi}{2k} = \frac{2}{\pi} + \log 2m + w \\ \frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{2m\pi}{k}} = \frac{1}{m\pi} + w' \\ \log\operatorname{tg}\frac{q\pi}{k} - \log\operatorname{tg}\frac{m\pi}{k} = \log\operatorname{tg}\frac{h}{2} - \log\frac{m\pi}{k} + w'' \\ \frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{(2q-1)\pi}{k}} = \frac{2}{k}\frac{1}{\sin h} + w''', \end{cases}$$

ubi signis w, w', w'', w''' significantur quantitates, in infinitum crescente numero k, ad cifram quam proxime accedentes. Quibus de causis relationes (21.) in hanc redigere licet formam

$$(23.)\quad \begin{cases} S' < (f(0)+\lambda)\frac{\pi}{2}+\frac{\lambda+\mu}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}+\log 2m+w\right) \\ S' > (f(0)-\mu)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{m\pi}-w'\right)-\frac{\lambda+\mu}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}+\log 2m+w\right) \\ S'' < \quad \tfrac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\alpha}\left(\log\operatorname{tg}\frac{h}{2}-\log\frac{m\pi}{k}+w''\right)+A\left(\frac{2}{k}\frac{1}{\sin h}+w'''+\frac{1}{m\pi}+w'\right) \\ S'' > -\tfrac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\alpha}\left(\log\operatorname{tg}\frac{h}{2}-\log\frac{m\pi}{k}+w''\right)-A\left(\frac{2}{k}\frac{1}{\sin h}+w'''\right). \end{cases}$$

Quibus in formulis id intuemur, expressionis

$$\tfrac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\alpha}\left(\log\operatorname{tg}\frac{h}{2}-\log\frac{m\pi}{k}\right),$$

quae expressioni $\tfrac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\alpha}\left(\log\operatorname{tg}\frac{h}{2}-\log m\right)+\tfrac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\alpha}\log\left(\frac{k}{\pi}\right)$ aequalis est, valorem crescente numero k minorem fieri quavis quantitate data, quia aggregatum $\log\operatorname{tg}\frac{h}{2}-\log m$ certum tenet valorem, potestas vero $\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\alpha}$ decrescit, functio denique $\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\alpha}\log\left(\frac{k}{\pi}\right)$, quamvis augeatur factor $\log\left(\frac{k}{\pi}\right)$, et ipsa decrescit pro omni valore α positivo. Atque hac in re sunt nervi demonstrationis nostrae. Si itaque quantitates quaedam, quae crescente numero k ad cifram appropinquent, nuncupantur η, η', η'', η''', consequimur formulas

$$(24.)\quad \begin{cases} S' < \frac{\pi}{2}f(0)+\eta, \quad S' > \frac{\pi}{2}f(0)-\frac{A}{m\pi}+\eta', \\ S'' < \frac{A}{m\pi}+\eta'', \quad S'' > -\eta'''. \end{cases}$$

Unde apparet, dummodo numerus m ita assumatur, ut quantitas $\frac{A}{m\pi}$ minor fiat exigua quadam quantitate ad libitum data, id quod semper fieri posse res ipsa indicat, aggregatum S' includi limitibus, quae quam minimum velis a valore $\frac{\pi}{2}f(0)$ differant, aggregatum S'' autem includi limitibus, quae quam minimum velis a valore cifrae distent. Quum igitur continuo crescente numero k aggregatum S' ad quantitatem $\frac{\pi}{2}f(0)$, aggregatum S'' ad cifram quam proxime accedat, dubitari non potest, quin aggregatum $S=S'+S''$ convergat in valorem $\frac{\pi}{2}f(0)$. Q. E. D.

Accurata demonstratione munito theoremate II. aditus patet ad indolem seriei (1.) casu nostro tertio melius cognoscendam. Est enim convergens et valori $\frac{1}{2}(\varphi(x-\varepsilon)+\varphi(x+\varepsilon))$, denotante ε quantitatem infinite parvam, quicunque valor inter $-\pi$ et $+\pi$ situs quantitati x conferatur, aequalis semper, si functio

$\varphi(x)$ pro singulis tantum variabilis valoribus praebet oscillationes, et semper una tantum hypothesi excepta, si functio $\varphi(x)$ per finitas intervalli partes habet oscillationes. Quae hypothesis est ea, ut per finitam quandam intervalli partem differentia $\varphi(x+\delta)-\varphi(x)$, quam decrescente quantitate δ et ipsam ad cifram quam proxime accedere ex continuitate functionis $\varphi(x)$ per eam intervalli partem servanda sequitur (et pro continuitatis definitione habendum est *)), ita tamen minuatur, ut pro *omnibus variabilis valoribus spatio illo contentis* nulla quantitatis δ fingi possit potestas positiva, quam non superet. Atque hoc evenire apparet, si differentia $\varphi(x+\delta)-\varphi(x)$ tali modo vel etiam lentius, quam functio $\frac{1}{\log\frac{1}{\delta}}$ decrescit **). Neque vero demonstrationis vis deletur, si in spatiis, per quae functio $\varphi(x)$ oscillationem habet, pro *singulis variabilis x valoribus* accidit, ut differentia $\varphi(x+\delta)-\varphi(x)$ modo dicto se habeat.

Hypothesi illa excepta semper fieri potest, ut intervallum functionis $\varphi(x)$ a $-\pi$ usque ad $+\pi$ extensum in finitum numerum spatiorum dirimatur, quorum limites invenies, dum secundum magnitudinem ordinaveris valores variabilis x eos, 1^0 quibus in functione $\varphi(x)$ continuitas deleatur, 2^0 quibus in functione $\varphi(x)$ valores maximi et minimi, ut ita dicam, singuli competant, 3^0 quibus singulis functio $\varphi(x)$ praebeat oscillationes, 4^0 qui sint limites spatiorum finitorum, per quae functio $\varphi(x)$ habeat oscillationes, 5^0 denique quibus singulis, dum in ejusmodi spatiis jacent, differentia $\varphi(x+\delta)-\varphi(\delta)$ decrescente quantitate δ lentius minuatur ulla quantitatis δ potestate positiva. Tum integrationis intervallo in integrali (2.) eundem in modum distributo integrale (2.) aggregato integralium formam eandem habentium aequale fieri, et crescente numero k eorum integralium quodque ad certum quendam valorem appropinquare elucet, qui vel theoremate I. vel theoremate II. facile designetur, unde, quae proposuimus, sequuntur.

Quae autem seriei (1.), posita illa hypothesi, sit indoles, speramus fore, ut alio loco et tempore quaerere nobis liceat.

Scripsi Bonnae die X. M. Aprilis A. MDCCCLXIV.

---

*) Diar. *Crell.* Vol. IV, pag. 159.

**) Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Art. 16. auct. *Gauss.*

Elementarer Beweis des *Pohlke*schen Fundamentalsatzes der Axonometrie.

(Von Herrn *H. Schwarz*.)

Prof. *Pohlke* hat um das Jahr 1853 den Satz aufgestellt und bewiesen, *dass drei in einer Ebene unter verschiedenen Winkeln von einem Punkte ausgehende Strecken von beliebiger Länge stets als eine (schiefe) Parallelprojection von drei auf einander senkrechten Strecken von gleicher Länge angesehen werden können.*

Da dieser Satz irrthümlicherweise *Steiner* zugeschrieben worden ist, so benutzt der Verfasser die sich hier darbietende Gelegenheit, um durch Anführung der Thatsachen das Eigenthumsrecht seines verehrten Lehrers ausser Zweifel zu stellen.

Prof. *Pohlke* theilte den in Rede stehenden Satz sowie dessen Beweis dem verstorbenen *Steiner* mit. Auf einer Reise in der Schweiz im Jahre 1856 erwähnte der Letztere den *Pohlke*schen Satz bei einer Unterredung mit Herrn *von Deschwanden*, dem damaligen Director des Züricher Polytechnikums. Herr *von Deschwanden* machte gegen den Satz einen Einwurf, durch welchen *Steiner* über dessen Richtigkeit zweifelhaft wurde.

Diesen Vorgang beschreibt *Steiner* selbst in einem unter dem 30. Juli 1858 von Kirchberg aus an Professor *Pohlke* gerichteten Brief und zwar folgendermassen:

> Als ich 1856 in Zürich dem Director des Polytechnikums, Herrn *von Deschwanden* (aus Unterwalden), von Herrn *Pohlke* sprach und hervorhob, derselbe habe gefunden, „dass irgend vier Punkte in einer Ebene immer als parallele Projection eines rechtwinkligen Dreibeines anzusehen seien“, wendete der Director sofort ein: „aber wie! wenn die gegebenen vier Punkte in einer Geraden liegen?“ Potz blitz! was war ich da verdutzt und wusste nichts zu stammeln, als für diesen Fall müsse man sich das Dreibein ∞ klein oder ∞ entfernt denken, — was aber beides nicht genügt; ergo Ihr Beweis wahrscheinlich falsch. Daher mag die Aufgabe ins Journal kommen, vorsetzend: Nous espérons que Mr. *Pohlke* donne la démonstration, wie einst *Gergonne* mich provocirte. *)

*) Vergl. über diese Unterredung auch: Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 6ter Jahrgang, 1861. S. 276.

Der Einwand wurde von Prof. *Pohlke* als nicht zutreffend entkräftet; als derselbe gemacht wurde, mochte man wohl nur die orthographische Projection im Sinne gehabt haben, daraus erklärt sich der scheinbare Widerspruch. Man thut jedoch vielleicht besser, den obigen Grenzfall von der Betrachtung auszuschliessen.

Prof. *Pohlke* hat den bewussten Satz mit Zuhülfenahme einer Schaar von einfachen Hyperboloiden bewiesen, welche die Projectionsebene in confocalen Hyperbeln schneiden und später aus diesem Beweise eine ziemlich einfache Construction der Stücke abgeleitet; er sagt in der ersten Abtheilung seiner „Darstellenden Geometrie“ *) S. 113: „Der Beweis dieses Satzes scheint nicht elementar geführt werden zu können, wir behalten ihn der zweiten Abtheilung vor.“

Herr *von Deschwanden* widmet in einem Aufsatze über die „Anwendung schiefer Parallelprojectionen zu axonometrischen Zeichnungen“ aus dem Jahre 1861 **) dem Satze einige ausführlichere Betrachtungen, welche jedoch den Gegenstand nicht erschöpfen und für den allgemeinen Fall auch nur zu einer Näherungsconstruction führen.

Dem Aufsatze des Herrn *von Deschwanden* folgte ein Aufsatz von Herrn *Kinkelin:* „Die schiefe axonometrische Projection“ ***), welcher im Wesentlichen denselben Gegenstand rein analytisch behandelt. (In demselben ist, beiläufig bemerkt, bei der Interpretation einiger Gleichungen die Richtung der Projectionsstrahlen mit der Richtung der Normalen auf die Projectionsebene verwechselt worden.)

Ein mit den Hülfsmitteln der darstellenden Geometrie geführter, elementarer und einfacher Beweis des *Pohlke*schen und eines noch etwas allgemeineren Satzes, der offenbar in die Elemente der darstellenden Geometrie gehört, war bis jetzt nicht bekannt; ein solcher soll hier gegeben werden.

Wir werden den Satz beweisen:

Hat man im Raume und in einer Ebene je drei von einem Punkte ausgehende Strecken, von denen die ersten drei nicht in einer Ebene, die zweiten drei nicht in einer Geraden liegen, so kann man jedesmal das Gebilde im Raume auf eine Ebene parallel so projiciren, dass die Projection dem zweiten Gebilde ähnlich wird.

---

*) Berlin, Gärtner, 1860.
**) Vierteljahrsschrift d. Naturf. Gesellsch. in Zürich. 6ter Jahrg. S. 254—284.
***) Ebendaselbst S. 358—367.

Es wird gezeigt werden, dass beide Gebilde ähnliche orthographische Projectionen haben müssen; ist dieses erhärtet, so braucht man bloss die absolute Grösse des zweiten Gebildes in dem Maasse zu verändern, dass die orthographischen Projectionen beider congruent werden; bringt man diese dann zur Deckung, so ist, weil die Projectionsstrahlen zusammenfallen, ein dem zweiten ähnliches Gebilde eine Parallelprojection des ersten, womit die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes dargethan ist.

Wir werden im Folgenden von zwei Hülfssätzen Gebrauch machen:

1. *Jedes Dreieck lässt sich orthographisch so projiciren, dass seine Projection einem gegebenen Dreiecke ähnlich wird.*

Gegeben Dreieck ABC und Dreieck LMN. *) Man construire ein Dreieck $A'BC$ ähnlich Dreieck LMN und lege durch A und A' einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf BC liegt; dieser schneide BC in D und E; so entsprechen sich bei der Projection die einzelnen Winkel der rechtwinkligen Dreiecke DAE und $DA'E$. Es sei AED der spitze Winkel, der grösser ist als sein entsprechender $A'ED$, so ergiebt AE die Richtung der Affinitätsaxe, welcher die gesuchte Projectionsebene parallel ist, und die Gleichung

$$\cos\delta = \frac{\operatorname{tg} A'ED}{\operatorname{tg} AED} = \frac{A'D.AE}{A'E.AD} < 1$$

die Grösse des Neigungswinkels dieser Projectionsebene gegen die Ebene des Dreiecks ABC.

Ist AA' senkrecht gegen BC, so wird die Construction noch einfacher.

Es giebt zwei gegen die Ebene des Dreiecks symmetrische Lagen der Projectionsebene.

Der Beweis der Richtigkeit der angegebenen Construction ist leicht zu führen. **)

2. *Damit von zwei vierpunktigen ebenen Gebilden das eine ähnlich sei einer Parallelprojection des andern, ist nothwendig und hinreichend, dass die algebraischen Verhältnisse der Inhalte dreier entsprechenden Dreiecke in beiden Gebilden dieselben sind.*

Der Beweis kann etwa folgendermassen geführt werden. Man verändere die absolute Grösse des einen Gebildes so, dass man beide Gebilde mit zwei entsprechenden Punkten zur Deckung bringen kann, so fallen dabei auch

---

*) Die Figuren wolle sich der geneigte Leser selbst entwerfen.

**) Vergl. *Gugler*, Lehrbuch der descriptiven Geometrie. §. 145. 2te Aufl. Stuttgart, Metzler, 1857.

zwei sich entsprechende, auf der Verbindungslinie liegende Diagonalpunkte beider Vierecke zusammen, woraus das Behauptete erhellt.

Für den besonderen Fall, dass ein Dreieck seinem entsprechenden in der Weise ähnlich ist, dass entsprechende Punkte Scheitel gleicher Winkel sind, sind beide Gebilde einander ähnlich.

Hieraus ergiebt sich, da man zufolge des ersten Hülfssatzes jedes Dreieck orthographisch so projiciren kann, dass es einem gegebenen ähnlich wird, *dass die für den zweiten Hülfssatz aufgestellte Bedingung auch noch dafür hinreichend ist, dass das eine Gebilde eine orthographische Projection habe, welche ähnlich ist dem andern.*

Die drei Strecken im Raume seien nun OL, OM, ON und mögen als die Grundstrecken eines (schiefwinkligen) räumlichen Coordinatensystems angesehen werden. Die drei beliebig in einer Ebene angenommenen Strecken seien $O'A$, $O'B$, $O'C$; es soll bewiesen werden, dass sich im Allgemeinen das Gebilde $O'ABC$ bis auf die absolute Grösse als eine Parallelprojection des räumlichen Gebildes $OLMN$ ansehen lässt.

Wenn dieser Satz richtig ist, so erhält man für einen beliebig im Raume gelegenen Punkt P, dessen parallel OL, OM, ON genommene und nach diesen Strecken als Einheiten gemessene Coordinaten

$$\frac{OU}{OL}, \quad \frac{UV}{OM}, \quad \frac{VP}{ON}$$

gegeben sind, die Projection desselben in der Ebene, indem man die einzelnen Strecken OU, UV, VP des Polygons $OUVP$ projicirt. Die Projectionen $O'U'$, $U'V'$, $V'P'$ sind beziehlich parallel den Strecken $O'A$, $O'B$, $O'C$ und haben zu ihnen dasselbe Verhältniss, wie OU, UV, VP zu OL, OM, ON.

Liegt nun P in dem durch O gezogenen Projectionsstrahl, so fällt in der Projection P' mit O' zusammen, und die Projectionen von OU, UV, VP bilden ein Dreieck mit der Ecke O', dessen Seiten beziehlich parallel $O'A$, $O'B$, $O'C$ sind.

Zeichnet man umgekehrt ein Dreieck $O'FG$, dessen Seiten $O'F$, FG, GO' beziehlich parallel sind $O'A$, $O'B$, $O'C$, so sind nothwendig, wenn der obige Satz richtig ist,

$$\frac{O'F}{O'A}, \quad \frac{FG}{O'B}, \quad \frac{GO'}{O'C}$$

die Coordinaten eines Punktes des durch den Coordinatenanfang gezogenen Projectionsstrahls, bezogen auf die Grundstrecken OL, OM, ON.

Bezeichnet man die Winkel $BO'C$, $CO'A$, $AO'B$ beziehlich mit α, β, γ, so ist

$$O'F : FG : GO' = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

und

$$\frac{O'F}{O'A} : \frac{FG}{O'B} : \frac{GO'}{O'C} = \frac{\sin\alpha}{O'A} : \frac{\sin\beta}{O'B} : \frac{\sin\gamma}{O'C} = \triangle BO'C : \triangle CO'A : \triangle AO'B.$$

Ist also $O'ABC$ ähnlich einer Parallelprojection von $OLMN$, so kann die Richtung der Projectionsstrahlen keine andere sein als die eben bestimmte.

Nun kann man die Grundstrecken des räumlichen Coordinatensystems orthographisch auf eine Ebene projiciren, welche auf der so bestimmten Richtung senkrecht steht.

Es sei die Projection $O''A'B'C'$, so sind nach dem eben bewiesenen Satze die Verhältnisse

$$\frac{\sin\alpha'}{O''A'} : \frac{\sin\beta'}{O''B'} : \frac{\sin\gamma'}{O''C'} = \triangle B'O''C' : \triangle C'O''A' : \triangle A'O''B'$$

dieselben, wie die aus dem Gebilde $O'ABC$ hergeleiteten; also ist die Bedingung des zweiten Hülfssatzes erfüllt.

Beide vierpunktigen Gebilde, das räumliche und das ebene, haben demnach ähnliche orthographische Projectionen und es ist daher, wie schon oben unter dieser Voraussetzung gezeigt, das ebene Gebilde ähnlich einer Parallelprojection des räumlichen.

Nach dem Gesagten bietet nun die Construction der Bestimmungsstücke in jedem einzelnen Falle keine Schwierigkeit dar.

Es giebt nur zwei Lagen der Projectionsebene gegen das räumliche System, welche gegen den Projectionsstrahl symmetrisch liegen.

Umgekehrt giebt es für die Projectionsebene zwei Richtungen, welche gegen die Normale symmetrisch liegen und auf der Affinitätsaxe senkrecht stehen, von welchen aus gesehen, das Gebilde als orthographische Projection erscheint, ein Umstand, welcher für Anwendungen wichtig ist.

Dagegen giebt es vier verschiedene Lagen des räumlichen Gebildes gegen die Projectionsebene, wenn man ein dem gegebenen symmetrisches Gebilde als ein von demselben nicht verschiedenes Gebilde auffasst; im andern Falle giebt es nur zwei.

Der angegebene Beweis hört auf gültig zu sein, wenn einer der ausgeschlossenen Grenzfälle eintritt, weil dann die Voraussetzungen desselben nicht mehr zutreffen; dahin gehört z. B. auch der Fall, dass in der Ebene

mehr als eine Strecke die Länge Null hat. Man kann sich jedoch diesen Grenzfällen beliebig nähern.

Durch den vorstehend bewiesenen *Pohlke*'schen Satz erhält die Axonometrie in sich den wünschenswerthen und nothwendigen Abschluss und ihre Anwendung zugleich diejenige Leichtigkeit, deren sie überhaupt fähig ist.

Zum Schlusse sei es gestattet, noch einen von Prof. *Pohlke* aufgestellten Satz anzuführen, der sich an dessen Beweis des obigen Satzes unmittelbar anschliesst, wenn man die Brennpunkte jener Schaar confocaler Hyperbeln ins Auge fasst, und zu dem man auch leicht auf elementarem Wege gelangen kann.

Irgend zwei zugeordnete Durchmesser und die kleine Axe einer Ellipse sind der Richtung nach die orthographischen Projectionen dreier rechtwinkligen Coordinatenaxen; die Verhältnisse der halben Durchmesser und der Excentricität zur halben grossen Axe sind die entsprechenden Verkürzungsverhältnisse.

Erst nach Beendigung des obigen Aufsatzes bin ich darauf aufmerksam gemacht worden, dass *Steiner* im Jahre 1858 im 55sten Bande p. 377 dieses Journals (vermischte Sätze und Aufgaben IV, 2) folgende den *Pohlke*schen Satz betreffende Aufgabe veröffentlicht hat:

Werden die Ecken A, B, C, D einer gleichseitigen, an der Spitze rechtwinkligen, dreiseitigen Pyramide nach irgend einer Richtung auf eine beliebige Ebene projicirt, so ist die Frage, welche Relation zwischen den gegenseitigen Abständen der Projectionen A_1, B_1, C_1, D_1 stattfinde?

Steiner verwirklichte also gleichzeitig mit dem an Prof. *Pohlke* gerichteten Brief (S. oben p. 309) die darin geäusserte Absicht, eine Aufgabe dieser Art in das Journal zu bringen, und die Fassung derselben bestätigt vollkommen die meinen Aufsatz einleitenden thatsächlichen Anführungen.

Berlin, im December 1863.

Sur la surface du quatrième ordre qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents.

(Par M. *L. Cremona* à Bologne.)

1. Dans les *Monatsberichte* de l'Académie royale des sciences de Berlin (juillet et novembre 1863) on lit des communications très-intéressantes, faites par MM. *Kummer*, *Weierstrass* et *Schröter*, au sujet de la surface du quatrième ordre qui jouit de la propriété d'être coupée suivant deux coniques (courbes du second degré) par chacun de ses plans tangents: surface, dont la première découverte est due à l'illustre *Steiner*.

Dans ce mémoire, je me suis proposé d'étudier cette remarquable surface. J'aurai occasion de démontrer, par les moyens de la géométrie pure, non-seulement les théorèmes déjà connus, mais d'autres encore, nouveaux et peut-être dignes d'attention.

2. Je considère, dans un plan donné E, une courbe du troisième ordre *(cubique fondamentale)*, sa *Hessienne*, qui est une autre courbe du même ordre, et le système des coniques polaires des points du plan, par rapport à la première courbe, lesquelles forment un *réseau* géométrique du second ordre. Je considère, en outre, les *poloconiques pures* et *mixtes* des droites du plan*).

Toute droite R a quatre pôles, qui forment la base du faisceau des coniques polaires des points de R: le triangle conjugué à ces coniques est inscrit dans la Hessienne, et ses sommets r sont conjugués (par rapport à toutes les coniques du réseau) aux points où R rencontre la même courbe. De plus, la Hessienne est tangente, aux points r, à la poloconique pure de R, et est coupée, en ces mêmes points, par la poloconique mixte de R et d'une autre droite arbitraire.

3. Soit $J^{(2)}$ une surface du second degré; o un point fixe de cette surface; T la droite intersection du plan E par le plan tangent à $J^{(2)}$ en o. Désignons par t les points de contact de la Hessienne avec la poloconique pure de T.

*) Voir mon *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, sez^{e}. III^{a} (Bologna 1862).

4. Considérons, dans le plan E, une conique polaire S; trois droites menées du point o aux sommets d'un triangle conjugué à cette conique, percent la surface $J^{(2)}$ en trois points, dont le plan passe constamment par un point fixe s, quel que ce soit le triangle conjugué *). Ce point s, qu'on peut regarder comme *correspondant* à la conique S, est évidemment situé sur la droite qui joint o au pôle de T, par rapport à S.

5. Supposons maintenant que la conique S soit variable autour des sommets d'un quadrangle fixe (pôles d'une droite fixe R). Les points diagonaux r de ce quadrangle forment un triangle conjugué à toutes les positions de S; donc le point correspondant s se maintiendra dans le plan P des trois points, où la surface $J^{(2)}$ est rencontrée par les droites or. Les pôles de la droite T, par rapport aux coniques S du faisceau, sont situés dans une autre conique K, passant par les points r; donc le lieu du point s est la conique H, intersection du plan P par le cône oK **).

6. La courbe K est la poloconique mixte des droites R, T, elle passe donc par les points t (2.). Il s'ensuit que, si l'on fait varier (dans le réseau) le faisceau des coniques polaires S, c'est-à-dire que si l'on fait varier la droite R, la conique K passera toujours par les trois points fixes t: et par conséquent, les coniques H, lieux des points s correspondants à toutes les coniques du réseau, rencontreront les trois droites fixes ot †).

7. Tout plan P contient deux coniques H. En effet, le plan P coupe la surface $J^{(2)}$ suivant une conique, et le cône déterminé par celle-ci, avec le sommet o, rencontrera la Hessienne, non-seulement aux points r, mais encore en trois points nouveaux r', par lesquels (et par les points t) passe la poloconique mixte K' de T et d'une autre droite R', coupant la Hessienne dans les pôles conjugués aux points r' (2.). Le cône oK' tracera sur le plan P une conique H', passant par les points où la première conique H s'appuie aux droites ot. La quatrième intersection des coniques H, H' sera le point s qui correspond (4.) à la conique S, polaire du point RR' ††).

8. Si la droite R coïncide avec T, K deviendra la poloconique pure de T. Le plan de la conique H coupe la surface $J^{(2)}$ suivant une conique

---

*) *Chasles, Mémoire sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie* (Mémoires couronnés par l'Académie royale de Bruxelles, t. XI, 1837: pag. 707 — 708).

**) *Weierstrass* (Monatsb. p. 337); *Schröter* (ibid. p. 524).

†) *Schröter* (ibid. p. 533).

††) *Weierstrass* (ibid. p. 338); *Schröter* (ibid. p. 534).

qui, dans ce cas, se confond avec H'; car le cône passant par cette conique, avec le sommet o, rencontre la Hessienne aux points t et en trois autres points; et la conique passant par ces derniers points et par les t détermine de nouveau le même cône. La surface $J^{(2)}$ contient donc une certaine conique H*).

9. Soient τ_1, τ_2, τ_3 les points où T rencontre la Hessienne, c'est-à-dire les pôles conjugués aux points t_1, t_2, t_3; on sait que $\tau_1 t_2 t_3$, $t_1 \tau_2 t_3$, $t_1 t_2 \tau_3$ sont des ternes de points en ligne droite. Supposons que la droite R prenne la position $\tau_1 t_2 t_3$; dans ce cas, la conique K passera (2.) par les points $t_1 \tau_2 \tau_3$, $t_1 t_2 t_3$, et par conséquent elle se décomposera en deux droites, $t_1 t_2$, $t_1 t_3$. Les droites or, qui, dans ce cas, deviennent $o(t_1, \tau_2, \tau_3)$, percent $J^{(2)}$ en trois points, dont les deux derniers coïncident avec o, parceque le plan $o\tau_2\tau_3$ est tangent à la surface $J^{(2)}$ en o (3.); le plan P de ces points passe donc par ot_1, mais il est du reste indéterminé. Et la section du cône oK par ce plan P, c'est-à-dire la conique H, se réduit à la droite ot_1, regardée comme un système de deux droites superposées. De même pour ot_2 et ot_3 **).

10. De quel ordre est la surface, lieu des points s, ou bien des coniques H? Chacune des droites ot représente une conique H pour tout plan qui passe par cette droite (9.): ainsi ot est une droite *double* sur la surface. Toutes les coniques H rencontrent ces trois droites ot (6.): donc les droites $o(t_2, t_3)$ représentent l'intersection complète de la surface par le plan ot_2t_3. Il s'ensuit que le lieu du point s est une surface $J^{(4)}$ du quatrième ordre, sur laquelle $o(t_1, t_2, t_3)$ sont des droites doubles, et o est un point triple: en effet, toute droite menée par o contient un seul point s †).

11. Dès que la Hessienne est le lieu des sommets des triangles conjugués aux coniques S, prises deux à deux, il est évident que la surface $J^{(4)}$ passe par la courbe gauche du sixième ordre, intersection de $J^{(2)}$ avec le cône, dont o est le sommet et la Hessienne est la base. Cette courbe gauche et une certaine conique H (8.) forment ensemble la complète intersection des surfaces $J^{(2)}$, $J^{(4)}$ ††).

---

*) *Schröter* (ibid. p. 535).
**) *Schröter* (ibid. p. 533—534).
†) *Weierstrass* (ibid. p. 338); *Schröter* (ibid. p. 537).
††) *Schröter* (ibid. p. 535).

12. Tout plan tangent à $J^{(4)}$ coupe cette surface suivant une ligne du quatrième ordre ayant quatre points doubles: le point de contact et les intersections du plan par les droites doubles ot. Donc la section de la surface $J^{(4)}$ par un quelconque de ses plans tangents est le système de deux lignes du second degré.

Réciproquement, tout plan qui coupe $J^{(4)}$ suivant deux coniques est tangent à la surface. En effet, parmi les quatre points communs aux coniques, trois appartiendront aux droites doubles; le quatrième est nécessairement un point de contact *).

13. Quelle est la classe de la surface $J^{(4)}$? Menons, dans l'espace, une droite arbitraire G, qui rencontrera la surface en quatre points $ss_1s_2s_3$. Si un plan tangent passe par G, les deux coniques H contenues dans ce plan rencontreront G en deux couples de points, qui seront ss_1, s_2s_3, ou ss_2, s_3s_1, ou ss_3, s_1s_2. Il y a donc au plus trois plans tangents qui passent par G: c'est-à-dire que la surface $J^{(4)}$ est de la troisième classe **).

Par deux points ss_1 donnés sur la surface, on peut, en général, mener une seule conique H. En effet, les droites $o(s, s_1)$, avec les trois droites ot, déterminent un cône du second degré, qui, passant par les droites doubles de la surface $J^{(4)}$, la coupera de nouveau suivant une ligne du deuxième ordre.

Si les points ss_1 sont infiniment proches, on trouve qu'une droite G, tangente à la surface $J^{(4)}$ en un point s, touche en ce point une conique H. Le plan de cette conique en contient une autre H', qui, en général, ne passe pas par s, mais par les deux autres intersections de $J^{(4)}$ par G. Toutefois, si G est osculatrice à la surface, H' passe par s et touche en ce point une autre droite G': la deuxième osculatrice correspondante au point s. Dans ce cas, le plan des coniques HH' (et des droites GG') est tangent à la surface en s.

14. La section faite par un plan quelconque dans la surface $J^{(4)}$ est une courbe du quatrième ordre qui possède, en général, trois points doubles (sur les droites ot) et est, par suite, de la sixième classe. D'où il suit que le cône circonscrit à la surface, dont le sommet soit un point arbitraire de l'espace, est du sixième ordre. Ce cône est d'ailleurs, ainsi que la surface $J^{(4)}$, de la troisième classe; il aura donc neuf génératrices cuspidales, c'est-à-dire que par un point quelconque de l'espace on

*) *Kummer* (ibid. p. 332); *Weierstrass* (ibid. p. 338).

**) *Schröter* (ibid. p. 538).

peut mener neuf droites osculatrices à la surface. Et un plan arbitraire contient six droites osculatrices, car la courbe du quatrième ordre, suivant laquelle $J^{(4)}$ est coupée par ce plan, a six points d'inflexion.

Par un point de la courbe susdite on peut lui mener quatre tangentes, dont les points de contact soient ailleurs; donc le cône circonscrit, dont le sommet soit sur la surface $J^{(4)}$, est du quatrième ordre. Ce cône, étant de la troisième classe, aura trois génératrices cuspidales et un plan bitangent: le plan qui touche $J^{(4)}$ au sommet du cône. On conclut d'ici que par un point quelconque de la surface $J^{(4)}$ on peut lui mener trois droites osculatrices, dont le contact soit ailleurs.

La même courbe de la sixième classe a deux tangentes issues de chacun de ses points doubles; donc le cône circonscrit, dont le sommet soit sur une droite double, est du deuxième ordre et, par suite, de la deuxième classe *).

15. Les plans tangents qu'on peut mener à la surface $J^{(4)}$ par un point d d'une droite double ot se partagent en deux séries: les uns passent par ot; les autres enveloppent le cône du second degré, déjà mentionné. Pour les premiers plans, les points de contact sont sur la droite ot; pour les derniers, le contact a lieu ailleurs. Mais le cône susdit admet deux plans tangents qui passent par ot: ces plans donc sont ceux qui touchent $J^{(4)}$ au point d; c'est-à-dire qu'ils sont le lieu des droites osculatrices à la surface en d. En effet, un plan mené arbitrairement par ot coupe la surface $J^{(4)}$ suivant une conique qui passe par o, car ce point est triple sur la surface: la deuxième intersection de la conique par la droite ot est un point d, où ce plan est tangent à la surface (12.).

Les plans menés par une droite double ot forment une involution, où deux plans conjugués sont tangents à la surface en un même point d. Les plans correspondants au point o sont évidemment ceux qui passent par ot et par l'une des deux autres droites doubles. Les points de contact des plans doubles de l'involution sont des points cuspidaux pour la surface $J^{(4)}$.

16. Ainsi, par un point arbitraire d de la droite double ot on peut mener deux droites dont chacune rencontre la surface en quatre points coïn-

*) *Kummer* (ibid. p. 333); *Schröter* (ibid. p. 538).

cidents: ces droites sont les tangentes en d aux coniques H situées dans les deux plans qui touchent la surface au même point. De quel degré est la surface, lieu de ces droites? Pour ce lieu, ot est une droite double: en outre, tout plan mené par ot ne contient qu'une de ces droites: le lieu cherché est, par suite, une surface du troisième degré. D'où je conclus que le plan des deux génératrices issues d'un même point d de ot passe par une droite fixe A*). Or les génératrices correspondantes au point o sont évidemment les deux autres droites doubles de $J^{(4)}$; donc le plan de celles-ci contient la droite A.

Nous aurons ainsi trois droites fixes A_1, A_2, A_3, correspondantes aux droites doubles $o(t_1, t_2, t_3)$, et situées respectivement dans les plans ot_2t_3, ot_3t_1, ot_1t_2. Un point quelconque α de A_1 détermine une droite génératrice de la surface du troisième degré rélative à ot_1: cette génératrice passe par α et est située dans le plan αot_1. Si le point α tombe à l'intersection des droites A_1, ot_3, la génératrice correspondante est ot_3: mais cette droite est une génératrice aussi de la surface du troisième degré rélative à ot_2; le point commun à A_1 et ot_3 appartient donc aussi à A_2. Les trois droites $A_1A_2A_3$ sont, par suite, dans un même plan Π et forment un triangle, dont les sommets $a_1a_2a_3$ sont situés sur les droites $o(t_1, t_2, t_3)$.

17. Il suit d'ici que le plan Π contient six droites passant, deux à deux, par a_1, a_2, a_3, et ayant chacune quatre points coïncidents communs avec la surface $J^{(4)}$ (elles sont les génératrices des trois surfaces gauches du troisième degré rélatives à $o(t_1, t_2, t_3)$, qui correspondent aux points a_1, a_2, a_3): c'est-à-dire que la courbe du quatrième ordre, $L^{(4)}$, intersection de $J^{(4)}$ par le plan Π, a, dans chacun de ses points doubles a, non-seulement trois, mais quatre points consécutifs communs avec chacune de ses tangentes au point double. Or l'on sait, par la théorie des courbes planes du quatrième ordre avec trois points doubles, que, lorsque les deux droites, qu'on peut, en général, mener par un point double à toucher une telle courbe ailleurs, coïncident respectivement avec les tangentes au point double, dans ce cas, ces tangentes sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites qui joignent ce point aux deux autres points doubles. Chaque droite double oat a donc cette propriété que les deux plans tangents en a sont conjugués harmo-

*) Voir mon Mémoire *Sulle superficie gobbe del terz' ordine* (Atti del R. Istituto Lombardo, vol. II, Milano 1861).

niques, non-seulement par rapport aux plans tangents aux points cuspidaux (15.), mais aussi par rapport aux plans déterminés par cette droite avec les deux autres droites doubles.

18. Par la même théorie des courbes du quatrième ordre avec trois points doubles, on sait que les six droites tangentes aux points doubles d'une telle courbe forment un héxagone de *Brianchon:* donc les trois couples de plans tangents en $a_1 a_2 a_3$ enveloppent un cône du second degré, conjugué au trièdre des droites doubles.

Autrement: dans l'involution (15.) des couples de plans tangents aux points d'une droite double ot, on pourra déterminer deux plans conjugués (soit a leur point de contact) qui divisent harmoniquement l'angle des plans passant par les autres droites doubles. Les points de contact, $a_1 a_2 a_3$, de ces trois couples singulières, correspondantes aux trois droites doubles, déterminent un plan Π coupant la surface $J^{(4)}$ suivant une telle courbe du quatrième ordre, que ses six tangentes aux points doubles enveloppent une conique conjuguée au triangle $a_1 a_2 a_3$.

19. Soient ω, ϖ les points cuspidaux sur la droite double oa. Par chacun de ces points on peut mener une seule droite qui rencontre $J^{(4)}$ en quatre points consécutifs: c'est la tangente à la conique suivant laquelle le plan (unique) tangent en ce point coupe la surface. Les deux droites analogues, correspondantes à ω et ϖ, marqueront sur la droite A les points doubles ε, η, de l'involution déterminée sur cette droite par les couples de plans qui passent par oa (15.).

Si d est un point quelconque de oa, il est évident qu'on pourra trouver, sur la même droite, un autre point d', tel que les plans tangents en d, d' forment un faisceau harmonique. Si l'on fait varier ensemble les points d, d', on a une involution dans laquelle o, a sont des points conjugués (17.), et ω, ϖ sont les points doubles. Donc les points cuspidaux ω, ϖ divisent harmoniquement le segment oa.

20. Toute conique H, tracée sur la surface $J^{(4)}$, est projectée, du point o sur le plan Π, suivant une conique K, circonscrite au triangle $a_1 a_2 a_3$ (6.). Réciproquement, toute conique K décrite par les points a est la perspective d'une conique H déterminée (la section de $J^{(4)}$ par le cône oK). La conique K rencontre la courbe du quatrième ordre, $L^{(4)}$, en deux autres points s, s_1; soient s_2, s_3 les nouvelles intersections de $L^{(4)}$ par la droite ss_1. La conique K', décrite par les points $a_1 a_2 a_3$ et $s_2 s_3$, est évidemment la perspective de

la conique H' située avec H dans un même plan P, dont la trace sur Π est la droite $ss_1s_2s_3$. Je nommerai *conjuguées* ces coniques K, K'.

Si le plan P rencontre la droite double oa en d, les deux plans tangents en d contiendront, séparément, les droites tangentes aux coniques H, H', et traceront, par suite, sur le plan Π les droites tangentes en a aux coniques K, K'. Et, à cause de la rélation d'involution entre les couples de plans passant par oa (15.), les couples de droites menées par a (dans le plan Π) formeront une involution, dans laquelle deux droites conjuguées sont tangentes, en ce point, à deux coniques K, K' conjuguées. Dans cette involution, les droites qui joignent a aux deux autres points doubles de $L^{(4)}$ sont évidemment conjuguées; tandis que les rayons doubles de l'involution sont les traces des plans tangents aux points cuspidaux de oa, c'est-à-dire les droites $a\varepsilon$, $a\eta$ (19.).

Ce qui est démontré dans ce numéro et dans les deux suivants ne cesse pas de subsister, si, au lieu du plan Π, l'on considère un autre plan transversal, arbitraire.

21. On sait que toute courbe plane du quatrième ordre, avec trois points doubles, a quatre tangentes doubles, dont les points de contact sont situés sur une même conique. Si ii' sont les points communs à la courbe $L^{(4)}$ et à une de ses tangentes doubles, la conique décrite par les points $a_1a_2a_3ii'$ sera conjuguée à soi-même, et par suite elle sera la perspective de deux coniques H superposées. On voit bien d'ailleurs que les plans tangents en i, i' ne peuvent pas être différents, car ils représenteraient quatre plans tangents menés par une même droite: ce qui est en opposition avec la classe de la surface (13.). Donc un même plan (représentant trois plans tangents consécutifs) touche la surface en i, i': et par conséquent, ce plan contient deux coniques H coïncidentes en une seule, dans chaque point de laquelle le même plan est tangent à la surface.

Ainsi nous arrivons à la conclusion qu'entre les plans tangents de la surface $J^{(4)}$, il y en a quatre singuliers, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, dont chacun contient une seule conique ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$) et touche la surface tout le long de cette conique*). Les droites situées dans ces plans sont tangentes à la surface, chacune en deux points: de plus, il est évident que toute tangente double de la surface, qui ne rencontre aucune des droites doubles oa, est située dans l'un des plans $\mathfrak{P}$.

*) *Kummer* (ibid. p. 395).

Et les tangentes de ces quatre coniques $\mathfrak{H}$ sont les droites qui, sans s'appuyer sur une droite double oa, rencontrent la surface en quatre points consécutifs. Par conséquent, le système de ces quatre coniques constitue le lieu des *points paraboliques* de la surface $J^{(4)}$ *).

22. Les perspectives des coniques $\mathfrak{H}$ sont les quatre coniques $\mathfrak{K}$, dont chacune coïncide avec sa conjuguée. Les tangentes aux coniques $\mathfrak{K}$, en a, sont les rayons doubles de l'involution des droites tangentes aux couples de coniques conjuguées: donc les coniques $\mathfrak{H}$ rencontrent les droites doubles oa aux points cuspidaux ω, ϖ (20.).

D'où il suit que deux plans $\mathfrak{P}$ se coupent suivant une droite tangente aux deux coniques $\mathfrak{H}$ correspondantes, en un même point: et ce point est l'un des six points cuspidaux de la surface. Autrement: les droites $\omega_1\varepsilon_1$, $\varpi_1\eta_1$, qui passent par les points cuspidaux de oa_1, et les autres droites analogues, rélatives à oa_2 et oa_3, sont les arêtes du tétraèdre formé par les quatre plans $\mathfrak{P}$.

Pour fixer les idées, supposons que

le plan $\mathfrak{P}$ contienne les points $\omega_1\omega_2\omega_3\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$,
- - $\mathfrak{P}_1$ - - - $\omega_1\varpi_2\varpi_3\varepsilon_1\eta_2\eta_3$,
- - $\mathfrak{P}_2$ - - - $\varpi_1\omega_2\varpi_3\eta_1\varepsilon_2\eta_3$,
- - $\mathfrak{P}_3$ - - - $\varpi_1\varpi_2\omega_3\eta_1\eta_2\varepsilon_3$;

et soient p, p_1, p_2, p_3 les sommets du même tétraèdre, de manière que ses arêtes contiendront les systèmes de points qui suivent:

$$\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1 \equiv p_2p_3\omega_1\varepsilon_1, \qquad \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3 \equiv pp_1\varpi_1\eta_1,$$
$$\mathfrak{P}\mathfrak{P}_2 \equiv p_3p_1\omega_2\varepsilon_2, \qquad \mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_1 \equiv pp_2\varpi_2\eta_2,$$
$$\mathfrak{P}\mathfrak{P}_3 \equiv p_1p_2\omega_3\varepsilon_3, \qquad \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \equiv pp_3\varpi_3\eta_3.$$

23. La droite $\omega_1\varepsilon_1$ est coupé en ω_1, ε_1 par les plans oa_2a_1, oa_2a_3, et en p_2, p_3 par les droites $\varpi_2\eta_2$, $\omega_2\varepsilon_2$, ou (ce qui est la même chose) par les plans tangents à la surface en ϖ_2, ω_2. Or ces quatre plans forment un faisceau harmonique (15.); donc l'arête p_2p_3 du tétraèdre $pp_1p_2p_3$ (et de même l'arête pp_1) est divisée harmoniquement par les arêtes oa_1, a_2a_3 du tétraèdre $oa_1a_2a_3$. Cela peut être répété pour les autres couples d'arêtes: on a donc une telle rélation de réciprocité entre les deux tétraèdres, que

---

*) En général, si une surface donnée a une droite *double*, cette droite est *quadruple* sur la surface Hessienne. Dans notre question, les trois droites oa et les quatre coniques $\mathfrak{H}$ constituent ensemble la complète intersection de la surface du quatrième ordre, $J^{(4)}$, avec sa Hessienne, qui est une surface du huitième ordre.

chaque couple d'arêtes opposées de l'un est divisée harmoniquement par deux arêtes opposées de l'autre. Et chaque couple d'angles dièdres opposés de l'un (des tétraèdres) est divisée harmoniquement par des plans passant par deux arêtes opposées de l'autre.

J'observe en outre que les quatre droites $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, $\varepsilon_1\eta_2\eta_3$, $\eta_1\varepsilon_2\eta_3$, $\eta_1\eta_2\varepsilon_3$ (intersections du plan Π par les plans $\mathfrak{P}$, et, par suite, tangentes doubles de la courbe $L^{(4)}$) forment un quadrilatère complet, dont les diagonales sont a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2; car, ces dernières droites étant divisées harmoniquement par les couples de points $\varepsilon_1\eta_1$, $\varepsilon_2\eta_2$, $\varepsilon_3\eta_3$, il s'ensuit que les droites $\varepsilon_1\eta_1$, $\varepsilon_2\eta_2$, $\varepsilon_3\eta_3$ sont les côtés d'un triangle ayant ses sommets aux points a_1, a_2, a_3.

24. La conique $\mathfrak{H}$ est inscrite dans le triangle $p_1p_2p_3$; ω_1, ω_2, ω_3 sont les points de contact (22.), et ε_1, ε_2, ε_3 sont les conjugués harmoniques des points de contact, par rapport aux couples de sommets du triangle circonscrit. Soient ii' les points où la conique $\mathfrak{H}$ rencontre le plan Π; on sait que chacun de ces points forme, avec $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, un système équianharmonique, c'est-à-dire un tel système dont les rapports anharmoniques fondamentaux sont égaux entre eux *). Analoguement pour les coniques $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$, par rapport aux droites $\varepsilon_1\eta_2\eta_3$, $\eta_1\varepsilon_2\eta_3$, $\eta_1\eta_2\varepsilon_3$. Or ces quatre droites forment un quadrilatère, dont $a_1a_2a_3$ est le triangle diagonal; donc les huit points $ii'i_1i_1'i_2i_2'i_3i_3'$ appartiennent à une même conique conjuguée aux triangles $a_1a_2a_3$, $a_1\varepsilon_1\eta_1$, $a_2\varepsilon_2\eta_2$, $a_3\varepsilon_3\eta_3$ **), c'est-à-dire à une conique $L^{(2)}$ passant par les points doubles des trois involutions $(a_2a_3, \varepsilon_1\eta_1)$, $(a_3a_1, \varepsilon_2\eta_2)$, $(a_1a_2, \varepsilon_3\eta_3)$. Ces points doubles sont déterminés par les couples de droites tangentes en a_1, a_2, a_3 à la courbe $L^{(4)}$ (18.); donc $L^{(2)}$ coïncide avec la conique enveloppée par les six droites tangentes à $L^{(4)}$ dans ses points doubles.

(Cette coïncidence n'a pas lieu, si au plan Π on substitue un autre plan transversal quelconque; car, dans ce cas, les tangentes à $L^{(4)}$ en a_1 ne sont plus conjuguées harmoniques par rapport à a_1a_2, a_1a_3; etc.)

On démontre aisément que la même conique $L^{(2)}$ est l'enveloppe d'une droite qui coupe la courbe $L^{(4)}$ en quatre points équianharmoniques. Réciproquement, la courbe $L^{(4)}$ est l'enveloppe d'une conique circonscrite au triangle $a_1a_2a_3$, laquelle coupe $L^{(2)}$ en quatre points équianharmoniques.

*) *Introduzione* etc. 27; *Giornale di matematiche*, Napoli 1863, p. 319, 377.

**) J'ignore si cette propriété est connue, mais on la démontre avec facilité. Du reste, la situation des huit points i sur le périmètre d'une même conique peut être déduite aussi de ce qu'ils sont les points de contact de la courbe $L^{(4)}$ avec ses tangentes doubles (21.).

25. La conique $\mathfrak{H}$ passe par les points $\omega_1\omega_2\omega_3 i i'$, et touche en ω_1 la droite $\omega_1\varepsilon_1$; la conique $\mathfrak{H}_1$ passe par les points $\omega_1\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3 i_1 i_1'$, et touche en ω_1 la même droite $\omega_1\varepsilon_1$. Les points $\eta_1\omega_2\bar{\omega}_3$ sont en ligne droite, parcequ'ils appartiennent à deux plans, $\mathfrak{P}_2$ et oa_2a_3; de même pour les points $\eta_1\bar{\omega}_2\omega_3$. En outre, les points $ii'i_1i_1'$ (intersections des coniques $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1$ par le plan Π) forment un quadrangle complet inscrit dans la conique $L^{(2)}$, dont $a_1\varepsilon_1\eta_1$ sont les points diagonaux (24.). Par conséquent, les cônes dont le sommet commun soit η_1 et les bases soient les coniques $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, ont les génératrices $\eta_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, i, i')$ communes, et au surplus ils sont touchés par le même plan, le long de la génératrice $\eta_1\omega_1$. Donc ces cônes coïncident entre eux; c'est-à-dire que les coniques $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1$ sont situées sur un même cône au sommet η_1. De même, ε_1 est le sommet d'un cône qui passe par les coniques $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$; etc. En d'autres mots: la tangente commune à deux coniques $\mathfrak{H}$ et le sommet du cône qui passe par elles divisent harmoniquement l'un des côtés du triangle $a_1a_2a_3$.

26. Les plans $oa_1\varepsilon_1$, $oa_2\varepsilon_2$, $oa_3\varepsilon_3$ coupent les côtés du triangle $a_1a_2a_3$ en trois points $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, qui sont en ligne droite; donc les plans $oa_1\eta_1$, $oa_2\eta_2$, $oa_3\eta_3$ conjugués harmoniques de ceux-là (par rapport aux couples de plans passant par les droites doubles oa) rencontreront le plan Π au point ν, pôle harmonique de la droite $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ par rapport au triangle $a_1a_2a_3$. Or ces trois derniers plans passent ensemble par p; les points o, ν, p sont donc en ligne droite. Il s'ensuit que les droites $o(p, p_1, p_2, p_3)$ rencontrent le plan Π en quatre points ν, ν_1, ν_2, ν_3, qui sont les pôles harmoniques des droites $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, $\varepsilon_1\eta_2\eta_3$, $\eta_1\varepsilon_2\eta_3$, $\eta_1\eta_2\varepsilon_3$, par rapport au triangle $a_1a_2a_3$. Ces quatre points forment un quadrangle complet, dont les couples de côtés opposés sont

$$\nu\nu_1 a_1\eta_1, \quad \nu_2\nu_3 a_1\varepsilon_1,$$
$$\nu\nu_2 a_2\eta_2, \quad \nu_3\nu_1 a_2\varepsilon_2,$$
$$\nu\nu_3 a_3\eta_3, \quad \nu_1\nu_2 a_3\varepsilon_3,$$

et par suite les points diagonaux sont a_1, a_2, a_3.

27. Je prends maintenant le quadrangle $\nu\nu_1\nu_2\nu_3$ comme base de cette *transformation conique* que mon ami M. *Beltrami* a étudiée dans son intéressant mémoire *Intorno alle coniche di nove punti* *). Dans cette transformation, à un point m (du plan Π) *correspond* le point m' déterminé par les droites $m'(a_1, a_2, a_3)$ conjuguées harmoniques des droites $m(a_1, a_2, a_3)$, par

*) Memorie dell' Accademia di Bologna, serie 2ª, vol. IIº, 1863.

rapport aux couples de côtés opposés du quadrangle, qui se croisent en a_1, a_2, a_3.

Les tangentes, en a, à la courbe $L^{(4)}$ sont des droites correspondantes, parce qu'elles divisent harmoniquement l'angle des droites $a(\varepsilon, \eta)$, côtés du quadrangle. Par conséquent, à la courbe $L^{(4)}$ correspondra la conique $L^{(2)}$ touchée par les six tangentes de $L^{(4)}$ aux points doubles; et les points de contact de ces droites avec $L^{(2)}$ appartiendront aux côtés du triangle $a_1 a_2 a_3$.

Si l'on circonscrit au triangle $a_1 a_2 a_3$ une conique K, soit k son pôle harmonique par rapport au même triangle, et D la droite polaire de k, par rapport à K. Soit k' le point correspondant à k; D' la droite correspondante à la conique K; et K' la conique correspondante à la droite D. Il est évident que les coniques K, K' sont conjuguées (20.); le point k' est le pôle harmonique de K' par rapport au triangle $a_1 a_2 a_3$, et, en outre, le pôle de D' par rapport à K'.

La polaire de k par rapport à K' et la polaire de k' par rapport à K sont une seule et même droite $\mathfrak{D}$, qui passe par le points où les coniques conjuguées K, K' rencontrent la courbe du quatrième ordre $L^{(4)}$.

Si les points kk' coïncident en un seul, ce qui arrive aux sommets du quadrangle fondamental, par ex. en ν, les droites DD' et aussi $\mathfrak{D}$ deviennent une seule et même droite, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$; et les coniques KK' se confondent avec la conique $\mathfrak{K}$. Celle-ci est donc la conique polaire harmonique du point ν (par rapport au triangle $a_1 a_2 a_3$) et correspond (dans la transformation) à la droite $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$. Dès que cette droite passe par ε_1, point de $a_2 a_3$, la conique correspondante sera touchée en a_1 par la droite $a_1 \varepsilon_1$. Donc les côtés du triangle $\nu_1 \nu_2 \nu_3$ sont tangents en a_1, a_2, a_3 à la conique $\mathfrak{K}$ (22.). D'où l'on conclut que les quatre coniques $\mathfrak{K}$ se touchent entre elles, deux à deux, aux points a_1, a_2, a_3 (22.).

Les intersections ii' de la droite $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ par sa conique correspondante sont des points correspondants; et dès que ces points sont situés sur la courbe $L^{(4)}$, ils appartiendront aussi à la conique $L^{(2)}$: résultat déjà obtenu autrement (24.).

Le point ν a pour polaire la droite $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$, soit par rapport à la conique $\mathfrak{K}$, soit par rapport à $L^{(2)}$: donc ces deux coniques se touchent entre elles en i, i'; ce qui est évident aussi, parceque la droite $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ est une tangente double de la courbe $L^{(4)}$ (23.).

28. Conçevons maintenant une surface Σ du second degré, passant

par les six points cuspidaux $\omega\bar{\omega}$. Or ces points divisent harmoniquement les segments oa (19.); le point o est donc le pôle du plan II par rapport à Σ. On a encore trois conditions libres pour déterminer complètement cette surface: je dispose de deux entre elles, de manière que le plan tangent en ω_1 passe par la droite a_2a_3. Ainsi les droites oa_1, a_2a_3 déviennent réciproques (par rapport à Σ); et par suite le plan tangent (à Σ) en $\bar{\omega}_1$ passe par a_2a_3, et le plan polaire de a_1 est oa_2a_3. Cela posé, la droite réciproque de oa_2 passe par a_1 et est située dans le plan II. Maintenant, je dispose de la troisième condition libre de manière que Σ soit touchée en ω_2 par le plan $a_1\omega_2a_3$; alors la droite a_3a_1 sera réciproque de oa_2; oa_3a_1 sera le plan polaire de a_2; et le plan tangent en $\bar{\omega}_2$ passera par a_3a_1. Ainsi la surface Σ est pleinement déterminée: les droites oa_3, a_1a_2 sont réciproques et, par suite, les plans tangents en ω_3, $\bar{\omega}_3$ passent par a_1a_2. Donc le tétraèdre $oa_1a_2a_3$ est conjugué à la surface Σ; et les droites $\omega\varepsilon$, $\bar{\omega}\eta$ sont tangentes à cette même surface en ω, $\bar{\omega}$.

La conique $\mathfrak{H}$ et la surface Σ ont en commun les points $\omega_1\omega_2\omega_3$ et les droites tangentes en ces points: donc $\mathfrak{H}$ est située entièrement sur Σ. C'est-à-dire que les quatre coniques $\mathfrak{H}$ résultent de l'intersection de la surface du quatrième ordre $J^{(4)}$ par une seule et même surface du second degré, Σ, conjuguée au tetraèdre $oa_1a_2a_3$.

29. Cette propriété n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général que je vais démontrer.

J'observe en premier lieu que, si une droite G rencontre une droite double oa en un point d et ensuite la surface $J^{(4)}$ en deux autres points ss_1, on pourra mener (13.) par G deux plans tangents P, P_1, par-dessus le plan Goa qui coupe la surface suivant une conique (15.) passant par ss_1. Les deux coniques H situées dans P rencontrent G aux couples de points ds, ds_1; et de même pour les deux coniques situées dans P_1. D'où l'on tire cette conséquence: que si, entre ces quatre coniques, l'on en choisit deux, qui ne soient pas dans un même plan et qui n'aient pas leurs tangentes en d situées dans un même plan passant par oa, ces deux coniques auront, outre d, un autre point commun s.

Cela posé, qu'on circonscrive au triangle $a_1a_2a_3$ une première conique K, dont soient a_1l_1, a_2l_2, a_3l_3 les tangentes aux sommets. Après, qu'on circonscrive au même triangle une deuxième conique K_1 qui soit touchée en a_1 par la droite a_1l_1' conjuguée de a_1l_1 (dans l'involution dont il a été question

ailleurs (20.)); et soient $a_2\lambda_2$, $a_3\lambda_3$ ses tangentes en a_2, a_3. Décrivons ensuite, autour du même triangle une troisième conique K_2, qui touche en a_2, a_3 les droites a_2l_2', $a_3\lambda_3'$ conjuguées de a_2l_2, $a_3\lambda_3$. Enfin, soit K_3 la conique décrite par $a_1a_2a_3$, qui est tangente en a_2, a_3 aux droites $a_2\lambda_2'$, a_3l_3' conjuguées de $a_2\lambda_2$, a_3l_3. Les tangentes en a_1 aux coniques K_2, K_3 seront évidemment deux droites conjuguées $a_1\lambda_1$, $a_1\lambda_1'$.

Désignons par H, H_1, H_2, H_3 les coniques, situées sur la surface $J^{(4)}$, dont les perspectives sur le plan Π (le centre de projection étant toujours en o) sont les quatre coniques susdites K, K_1, K_2, K_3.

Or deux droites conjuguées (dans le plan Π) issues du point a sont les traces des plans tangents à la surface en un même point de oa; les coniques H, H_1 ont donc un point commun d_1 sur oa_1. Ces deux coniques ne sont pas dans un même plan, car leurs perspectives K, K_1 n'ont pas en a_2, a_3 des tangentes conjuguées; par conséquent, H, H_1 auront, outre d_1, un autre point commun s_1, dont la projection est la quatrième intersection des coniques K, K_1. De même, les coniques H_2, H_3 auront en commun un point δ_1 sur oa_1 et un autre point σ_1; etc. Soient (d_2, s_2), (δ_2, σ_2), (d_3, s_3), (δ_3, σ_3) les points analogues correspondants aux couples de coniques HH_2, H_3H_1, HH_3, H_1H_2.

Les coniques H, H_1 sans être dans un même plan, ont deux points communs d_1, s_1. On pourra donc décrire par ces deux coniques et par le point δ_1 une surface du second degré, Φ. Cette surface passe par cinq points $\delta_1 d_2 \delta_3 s_2 \sigma_3$ de la conique H_2 et par cinq points $\delta_1\delta_2 d_3 \sigma_2 s_3$ de la conique H_3; donc les quatre coniques $HH_1H_2H_3$ sont situées dans une seule et même surface Φ du second degré.

Les plans de ces coniques coupent la surface du quatrième ordre $J^{(4)}$ suivant quatre autres coniques $H'H_1'H_2'H_3'$, qui résulteront par suite de l'intersection de $J^{(4)}$ par une autre surface Φ' du second degré *).

Bologne, 12. février 1864.

*) Dans ce mémoire j'ai employé la considération du système des coniques polaires rélatives à une courbe du troisième ordre (2.), et cela seulement parceque les notations qui en résultent sont très-simples. Mais on obtient les mêmes propriétés et on les démontre absolument de la même manière, lorsqu'on prend pour point de départ un réseau *quelconque* de coniques.

Nachschrift zu der Abhandlung über Induction in rotirenden Leitern, S. 158 dieses Bandes.

(Von Herrn *E. Jochmann.*)

Die auf Seite 172 dieses Bandes aufgestellten Gleichungen (26.) und (27.) können für den Fall einer um ihren Durchmesser rotirenden Kugel mit Hülfe einer Reihenentwicklung nach Kugelfunctionen leicht integrirt werden.

Die Resultate sollen ihrer bemerkenswerthen Einfachheit wegen hier angegeben werden. Ist

$$s = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

die Entfernung eines inducirenden Poles vom Kugelmittelpunkt, ist ferner

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

und bezeichnet λ den von den Richtungen r und s eingeschlossenen Winkel, endlich ϱ wie früher die Entfernung des Punktes x, y, z im Innern des Leiters von dem inducirenden Pol, so dass man hat

$$\varrho^2 = r^2+s^2-2rs\cos\lambda,$$

so wird

$$V = 2nk\Sigma\mu\frac{r(cr-sz\cos\lambda)}{s\varrho(\varrho+s-r\cos\lambda)},$$

wo die Summation über alle vorhandenen Magnetpole auszudehnen ist. Setzt man ferner

$$\Psi = 2nkK\Sigma\mu\frac{bx-ay}{\varrho s(\varrho+s-r\cos\lambda)}$$

so werden die Componenten der Stromdichtigkeit im Punkte x, y, z:

$$u = y\frac{\partial\Psi}{\partial z}-z\frac{\partial\Psi}{\partial y},$$

$$v = z\frac{\partial\Psi}{\partial x}-x\frac{\partial\Psi}{\partial z},$$

$$w = x\frac{\partial\Psi}{\partial y}-y\frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

Aus der Form dieser Ausdrücke ist ersichtlich, dass die radiale Stromcomponente in jedem Punkt im Innern der Kugel verschwindet oder dass alle Strömungen auf concentrischen Kugelflächen stattfinden. Es folgt daraus ferner,

dass die Resultate unmittelbar auch für eine von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzte Schale gültig bleiben. Nur hat man in diesem Fall auch auf der Innenfläche der Hohlkugel eine derartige Vertheilung freier Electricität zu supponiren, dass durch dieselbe in Verbindung mit der im Innern und auf der äussern Oberfläche des Leiters vorhandenen Electricität das Potential V den oben angegebenen Werth erhält. Die Form der Strömungscurven im Innern des Leiters ist durch die Gleichungen

$$r = \text{const.}, \quad \Psi = \text{const.}$$

bestimmt. Die Componenten der Wirkung des inducirten Stromsystems auf einen äussern Magnetpol m sind

$$-m\frac{\partial Q}{\partial \xi}, \quad -m\frac{\partial Q}{\partial \eta}, \quad -m\frac{\partial Q}{\partial \zeta},$$

wenn ξ, η, ζ die Coordinaten des Poles bezeichnen und

$$Q = \frac{\partial}{\partial \xi}\int \Psi' \frac{x'}{\mathfrak{r}}\,dx'\,dy'\,dz' + \frac{\partial}{\partial \eta}\int \Psi' \frac{y'}{\mathfrak{r}}\,dx'\,dy'\,dz' + \frac{\partial}{\partial \zeta}\int \Psi' \frac{z'}{\mathfrak{r}}\,dx'\,dy'\,dz'$$

$$\mathfrak{r}^2 = (x'-\xi)^2 + (y'-\eta)^2 + (z'-\zeta)^2$$

gesetzt wird. Ist nur *ein* inducirender Pol vorhanden, so sind die Integrationen leicht auszuführen, wenn es sich um die Berechnung der Rückwirkung des inducirten Stromsystemes auf den reducirenden Pol handelt, oder wenn nach erfolgter Differentiation $\xi = a$, $\eta = b$, $\zeta = c$, mithin $\mathfrak{r} = \varrho$ gesetzt wird. Es wird dann, wenn man der Einfachheit halber $b = 0$ setzt, im Fall einer Vollkugel vom Halbmesser R,

$$X = 0, \quad Z = 0$$

$$Y = -\frac{nkK\pi a\mu^2}{2s^2}\left[\frac{9Rs^2 - 7R^3}{s^2 - R^2} + \frac{9s^2 - R^2}{2s}\log\frac{s-R}{s+R}\right]$$

oder im Fall einer Hohlkugel, deren innerer und äusserer Halbmesser mit R_1 und R_2 bezeichnet werden,

$$Y = -\frac{nkK\pi a\mu^2}{2s^2}\left[\frac{9rs^2 - 7r^3}{s^2 - r^2} + \frac{9s^2 - r^2}{2s}\log\frac{s-r}{s+r}\right]_{r=R_1}^{r=R_2}.$$

Der Zusammenhang dieser Resultate mit den früher für den Fall einer ebenen Platte gefundenen ist ersichtlich.

Ausserordentlich einfach gestaltet sich das Resultat in dem Fall, dass die Kugel unter dem Einfluss einer constanten magnetischen Kraft, z. B. des Erdmagnetismus, rotirt. Wählt man die durch die Rotationsaxe und die Richtung der constanten magnetischen Kraft gelegte Ebene, welche der Kürze

halber die Ebene des magnetischen Meridians genannt werden soll, zur Ebene der XZ, so hat man $b=0$ zu setzen und dann s und μ ins Unendliche wachsen zu lassen, während die Verhältnisse $\frac{a}{s}=\sin\gamma$ und $\frac{\mu}{s^2}=T$ constante Werthe behalten. Es ist dann T die Intensität der constanten magnetischen Kraft und γ der Winkel, welchen ihre Richtung mit der Rotationsaxe einschliesst. Die Strömungscurven reduciren sich in diesem Fall auf das durch die Gleichungen

$$r=\text{const.},\quad y=\text{const.}$$

dargestellte System von Kreisen, deren Ebenen sämmtlich der Ebene des magnetischen Meridians parallel sind. Die innerhalb jeder Strömungscurve constante Stromdichtigkeit wird

$$\tfrac{1}{2}nkKT\sin\gamma\,.\,\lambda,$$

wenn

$$\lambda=\sqrt{r^2-y^2}$$

den Halbmesser des Stromkreises bezeichnet. In Betreff seiner Wirkung nach Aussen verhält sich das Stromsystem wie ein Magnet, dessen Axe mit der Y-Axe zusammenfällt, also auf der Ebene des magnetischen Meridians senkrecht steht. Bemerkenswerth ist die Analogie dieses Resultats mit demjenigen, welches *Poisson* (Mém. sur le magnétisme en mouvement, Mém. de l'ac. des sciences T. VI, p. 497) aus seiner magnetischen Theorie des Rotationsmagnetismus hergeleitet, sowie mit dem Resultat, welches *Green* (dieses Journal Band XLVII, p. 187) für den Fall gefunden hat, dass eine Kugel von unvollkommenem elektrischen Leitungsvermögen unter dem Einfluss einer constanten elektrostatischen Kraft oder eine aus magnetisirbarer und mit Coercitivkraft begabter Substanz gebildete Kugel unter dem Einfluss einer constanten magnetisirenden Kraft rotirt.

Berlin, im März 1864.

Sur le déplacement d'une courbe, invariable de forme, qui reste tangente à une courbe fixe.

(Par M. *Edouard Combescure* à St. Etienne.)

Si l'on considère une courbe donnée $\mathfrak{C}$, rapportée à trois axes rectangulaires fixes, et une autre courbe donnée $\mathfrak{C}_1$, liée invariablement à trois axes rectangulaires mobiles: Si l'on conçoit en même temps deux points matériels M, M_1, parcourant respectivement ces courbes de telle sorte que les arcs décrits s, s_1, comptés à partir d'une origine fixe sur chaque courbe, soient des fonctions données du temps t; on peut, pour rendre tout-à-fait déterminé le mouvement absolu du système, assujettir à des conditions convenables certains éléments géométriques du système en question. Ainsi, par exemple, on peut admettre 1° qu'à chaque instant les points M et M_1 coïncident: 2° que leurs trajectoires relatives $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$ se touchent en ce point: 3° enfin que les plans osculateurs de ces deux courbes font entr'eux, au même point, un angle dont la loi est donnée.

Le mouvement étant ainsi réglé, il se présente d'abord la question:

(I) de trouver le lieu que décrit, dans l'espace absolu, un point invariablement lié au système mobile et les éléments ordinaires, comme l'axe instantané de rotation etc., qui caractérisent le mouvement.

La solution analytique du problème introduit naturellement quatre groupes de quantités: 1° les coordonnées absolues de l'origine mobile ou point décrivant: 2° les coordonnées absolues du point M: 3° les coordonnées relatives du même point: 4° les cosinus de direction des axes mobiles relativement aux axes fixes. En prenant pour données les quantités qui entrent dans deux quelconques de ces groupes, conservant la condition du contact, supprimant la loi de l'angle des plans osculateurs et adoptant celle de la vitesse instantanée de rotation ou celle des vitesses v, v_1 de M, M_1 sur leurs trajectoires respectives, on donne immédiatement lieu à cinq nouveaux problèmes qu'on peut énoncer comme il suit:

(II) Connaissant la courbe fixe, les vitesses v, v_1 et les cosinus de direction des axes mobiles, trouver la courbe mobile et le lieu que décrit un point lié au système.

(III) Connaissant la courbe mobile, les vitesses v, v_1 et les cosinus des axes mobiles, trouver la courbe fixe et le lieu décrit par un point lié au système.

(IV) Connaissant la courbe mobile, les vitesses v, v_1 et le lieu décrit par un point du système, trouver la courbe fixe et les cosinus des axes mobiles.

(V) Connaissant la courbe fixe, le lieu décrit par un point du système et la vitesse instantanée de rotation, trouver la courbe mobile et les cosinus des axes.

(VI) Connaissant les cosinus des axes mobiles et le lieu décrit par un point lié à ces axes, trouver la courbe mobile et la courbe fixe.

Il est entendu, dans ces six questions, que les quantités qui déterminent les données sont des fonctions censées connues du temps.

La solution des questions (II) et (III) est immédiate; mais j'ai du me borner à une simple indication au sujet de la question (IV), à cause de la difficulté de l'intégration. Les questions (V) et (VI) se ramènent au problème de Mécanique où il s'agit de trouver les cosinus de direction de trois axes rectangulaires liés à un corps solide, quand on connait, en fonctions du temps, les trois composantes de la vitesse instantanée de rotation. Je m'occupe, en conséquence, de cette question auxiliaire, qui ne me parait pas avoir été examinée généralement.

§. 1.

Détermination des *cosinus* et du *lieu* dans le problème (I).

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires, rapportées aux axes fixes $o.xyz$, d'un point quelconque de la courbe $\mathfrak{C}$: x_1, y_1, z_1 les coordonnées rectangulaires, rapportées aux axes mobiles $o_1.x_1y_1z_1$, d'un point quelconque de la courbe $\mathfrak{C}_1$, liée à ces axes. Ces six coordonnées sont des fonctions connues du temps t, d'où résulte la connaissance de v et v_1 en fonction de la même variable indépendante. J'appelerai ξ, η, ζ les coordonnées, rapportées aux axes fixes, du point décrivant o_1, pris pour origine des axes mobiles: a, b, c; a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 les cosinus des angles que font les trois axes mobiles successivement avec ox, oy, oz. Ces cosinus sont liés par les relations ordinaires

$$(a.)\quad \begin{cases} a^2+b^2+c^2=1, & aa_1+bb_1+cc_1=0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots; \\ a^2+a_1^2+a_2^2=1, & bc+b_1c_1+b_2c_2=0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

On aura d'abord pour le point M, commun aux deux courbes $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, les formules de la transformation des coordonnées

$$(1.)\quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + a x_1 + b y_1 + c z_1, \\ y = \mathfrak{y} + a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1, \\ z = \mathfrak{z} + a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1. \end{cases}$$

Puis la formule du cosinus de l'angle de deux directions donnera, pour exprimer la condition du contact, les trois nouvelles équations

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a \dfrac{dx_1}{ds_1} + b \dfrac{dy_1}{ds_1} + c \dfrac{dz_1}{ds_1}, \\ \dfrac{dy}{ds} = a_1 \dfrac{dx_1}{ds_1} + b_1 \dfrac{dy_1}{ds_1} + c_1 \dfrac{dz_1}{ds_1}, \\ \dfrac{dz}{ds} = a_2 \dfrac{dx_1}{ds_1} + b_2 \dfrac{dy_1}{ds_1} + c_2 \dfrac{dz_1}{ds_1}, \end{cases}$$

qui n'équivalent qu'à deux distinctes, à cause que la somme de leurs carrés donne une identité en vertu des relations $(a.)$. Cette réduction d'une unité dans le nombre des six équations (1.) et (2.) exige l'introduction d'une condition nouvelle qui a été spécifiée, sous le point de vue qui m'a paru le plus simple, dans l'énoncé des problèmes ci-dessus indiqués. Pour exprimer la condition relative au cas actuel, soient représentés par

$\alpha, \beta, \gamma;\ \xi, \eta, \zeta;\ \lambda, \mu, \nu$ (relativement aux axes $o.x\,y\,z$)

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ \xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \zeta^{(1)};\ \lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \nu^{(1)}$ (relativement aux axes $o_1.x_1 y_1 z_1$)

les cosinus de direction de la tangente, du rayon de courbure et de l'axe du plan osculateur de la courbe $\mathfrak{C}$: par

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ \xi_1, \eta_1, \zeta_1;\ \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ (relativement aux axes $o_1.x_1 y_1 z_1$)

$\alpha, \beta, \gamma;\ \xi_1^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \zeta_1^{(0)};\ \lambda_1^{(0)}, \mu_1^{(0)}, \nu_1^{(0)}$ (relativement aux axes $o.x\,y\,z$)

les cosinus de direction des trois droites analogues de la courbe $\mathfrak{C}_1$; enfin par ε l'angle que font, au point M, les rayons de courbure ρ et ρ_1 des deux courbes. Cet angle sera le même que celui des plans osculateurs, à cause du contact supposé. Si l'on mène par le point M des parallèles $M.x, y, z$ et $M.x_1, y_1, z_1$ aux parties positives des deux systèmes d'axes coordonnés (auxquels je supposerai une disposition semblable) et en même temps: la tangente MT commune aux deux courbes (dans le sens où croissent s et s_1), les rayons de courbure MC, MC_1 (C, C_1 étant les centres de courbure), enfin les axes MI, MI_1 des plans osculateurs; on pourra considérer $M.TCI$, $M.TC_1I_1$ comme deux nouveaux systèmes d'axes rectangulaires ayant la disposition relative

des parties positives des axes $M.xyz$ ou $M.x_1y_1z_1$, en convenant, toutefois, que l'angle ε sera compté de MC vers MC_1 et que les axes MI, MI_1 des plans osculateurs seront placés respectivement du même côté de ces plans que les plans osculateurs consécutifs.

Cela posé, en rapportant toutes les directions au système $M.TC_1I_1$, les angles de MC sont: $\frac{\pi}{2}$, ε, $\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ et ceux de MI: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, ε; tandisque Mx_1 a pour cosinus de direction α_1, ξ_1, λ_1. Donc, par la formule du cosinus de l'angle de deux droites, on aura la première de chacun des deux groupes suivants, les autres ayant une origine analogue:

$$(3.)\quad \begin{cases} \xi^{(1)} = \xi_1\cos\varepsilon - \lambda_1\sin\varepsilon, & \lambda^{(1)} = \xi_1\sin\varepsilon + \lambda_1\cos\varepsilon, \\ \eta^{(1)} = \eta_1\cos\varepsilon - \mu_1\sin\varepsilon, & \mu^{(1)} = \eta_1\sin\varepsilon + \mu_1\cos\varepsilon, \\ \zeta^{(1)} = \zeta_1\cos\varepsilon - \nu_1\sin\varepsilon, & \nu^{(1)} = \zeta_1\sin\varepsilon + \nu_1\cos\varepsilon; \end{cases}$$

en rapportant toutes les directions au système $M.TCI$, on aura de même

$$(3^*.)\quad \begin{cases} \xi_1^{(0)} = \xi\cos\varepsilon + \lambda\sin\varepsilon, & \lambda_1^{(0)} = -\xi\sin\varepsilon + \lambda\cos\varepsilon, \\ \eta_1^{(0)} = \eta\cos\varepsilon + \mu\sin\varepsilon, & \mu_1^{(0)} = -\eta\sin\varepsilon + \mu\cos\varepsilon, \\ \zeta_1^{(0)} = \zeta\cos\varepsilon + \nu\sin\varepsilon, & \nu_1^{(0)} = -\zeta\sin\varepsilon + \nu\cos\varepsilon. \end{cases}$$

La même formule du cosinus donnera, par suite, en prenant $M.TCI$ pour système de comparaison,

$$(4.)\quad \begin{cases} a = \cos.\widehat{xx_1} = \alpha\alpha_1 + \xi\xi^{(1)} + \lambda\lambda^{(1)}, \\ b = \cos.\widehat{xy_1} = \alpha\beta_1 + \xi\eta^{(1)} + \lambda\mu^{(1)}, \\ c = \cos.\widehat{xz_1} = \alpha\gamma_1 + \xi\zeta^{(1)} + \lambda\nu^{(1)}, \\ a_1 = \cos.\widehat{yx_1} = \beta\alpha_1 + \eta\xi^{(1)} + \mu\lambda^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

et, en ayant égard aux relations (3.), il viendra

$$(4^*.)\quad \begin{cases} a = \alpha\alpha_1 + (\xi\xi_1 + \lambda\lambda_1)\cos\varepsilon + (\lambda\xi_1 - \xi\lambda_1)\sin\varepsilon, \\ b = \alpha\beta_1 + (\xi\eta_1 + \lambda\mu_1)\cos\varepsilon + (\lambda\eta_1 - \xi\mu_1)\sin\varepsilon, \\ c = \alpha\gamma_1 + (\xi\zeta_1 + \lambda\nu_1)\cos\varepsilon + (\lambda\zeta_1 - \xi\nu_1)\sin\varepsilon; \\ a_1 = \beta\alpha_1 + (\eta\xi_1 + \mu\lambda_1)\cos\varepsilon + (\mu\xi_1 - \eta\lambda_1)\sin\varepsilon, \\ b_1 = \beta\beta_1 + (\eta\eta_1 + \mu\mu_1)\cos\varepsilon + (\mu\eta_1 - \eta\mu_1)\sin\varepsilon, \\ c_1 = \beta\gamma_1 + (\eta\zeta_1 + \mu\nu_1)\cos\varepsilon + (\mu\zeta_1 - \eta\nu_1)\sin\varepsilon; \\ a_2 = \gamma\alpha_1 + (\zeta\xi_1 + \nu\lambda_1)\cos\varepsilon + (\nu\xi_1 - \zeta\lambda_1)\sin\varepsilon, \\ b_2 = \gamma\beta_1 + (\zeta\eta_1 + \nu\mu_1)\cos\varepsilon + (\nu\eta_1 - \zeta\mu_1)\sin\varepsilon, \\ c_2 = \gamma\gamma_1 + (\zeta\zeta_1 + \nu\nu_1)\cos\varepsilon + (\nu\zeta_1 - \zeta\nu_1)\sin\varepsilon; \end{cases}$$

On aura d'abord pour le point M, commun aux deux courbes $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, les formules de la transformation des coordonnées

$$(1.)\quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + a x_1 + b y_1 + c z_1, \\ y = \mathfrak{y} + a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1, \\ z = \mathfrak{z} + a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1. \end{cases}$$

Puis la formule du cosinus de l'angle de deux directions donnera, pour exprimer la condition du contact, les trois nouvelles équations

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a \dfrac{dx_1}{ds_1} + b \dfrac{dy_1}{ds_1} + c \dfrac{dz_1}{ds_1}, \\ \dfrac{dy}{ds} = a_1 \dfrac{dx_1}{ds_1} + b_1 \dfrac{dy_1}{ds_1} + c_1 \dfrac{dz_1}{ds_1}, \\ \dfrac{dz}{ds} = a_2 \dfrac{dx_1}{ds_1} + b_2 \dfrac{dy_1}{ds_1} + c_2 \dfrac{dz_1}{ds_1}, \end{cases}$$

qui n'équivalent qu'à deux distinctes, à cause que la somme de leurs carrés donne une identité en vertu des relations $(a.)$. Cette réduction d'une unité dans le nombre des six équations (1.) et (2.) exige l'introduction d'une condition nouvelle qui a été spécifiée, sous le point de vue qui m'a paru le plus simple, dans l'énoncé des problèmes ci-dessus indiqués. Pour exprimer la condition relative au cas actuel, soient représentés par

$\alpha, \beta, \gamma;\ \xi, \eta, \zeta;\ \lambda, \mu, \nu$ (relativement aux axes $o\,.\,x\,y\,z$)

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ \xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \zeta^{(1)};\ \lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \nu^{(1)}$ (relativement aux axes $o_1 . x_1 y_1 z_1$)

les cosinus de direction de la tangente, du rayon de courbure et de l'axe du plan osculateur de la courbe $\mathfrak{C}$: par

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ \xi_1, \eta_1, \zeta_1;\ \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ (relativement aux axes $o_1 . x_1 y_1 z_1$)

$\alpha, \beta, \gamma;\ \xi_1^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \zeta_1^{(0)};\ \lambda_1^{(0)}, \mu_1^{(0)}, \nu_1^{(0)}$ (relativement aux axes $o\,.\,x\,y\,z$)

les cosinus de direction des trois droites analogues de la courbe $\mathfrak{C}_1$; enfin par ε l'angle que font, au point M, les rayons de courbure ρ et ρ_1 des deux courbes. Cet angle sera le même que celui des plans osculateurs, à cause du contact supposé. Si l'on mène par le point M des parallèles $M.x, y, z$ et $M.x_1, y_1, z_1$ aux parties positives des deux systèmes d'axes coordonnés (auxquels je supposerai une disposition semblable) et en même temps: la tangente MT commune aux deux courbes (dans le sens où croissent s et s_1), les rayons de courbure MC, MC_1 (C, C_1 étant les centres de courbure), enfin les axes MI, MI_1 des plans osculateurs; on pourra considérer $M.TCI$, $M.TC_1I_1$ comme deux nouveaux systèmes d'axes rectangulaires ayant la disposition relative

des parties positives des axes $M.xyz$ ou $M.x_1y_1z_1$, en convenant, toutefois, que l'angle ε sera compté de MC vers MC_1 et que les axes MI, MI_1 des plans osculateurs seront placés respectivement du même côté de ces plans que les plans osculateurs consécutifs.

Cela posé, en rapportant toutes les directions au système $M.TC_1I_1$, les angles de MC sont: $\frac{\pi}{2}$, ε, $\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ et ceux de MI: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, ε; tandisque Mx_1 a pour cosinus de direction α_1, ξ_1, λ_1. Donc, par la formule du cosinus de l'angle de deux droites, on aura la première de chacun des deux groupes suivants, les autres ayant une origine analogue:

$$(3.)\quad \begin{cases} \xi^{(1)} = \xi_1\cos\varepsilon - \lambda_1\sin\varepsilon, & \lambda^{(1)} = \xi_1\sin\varepsilon + \lambda_1\cos\varepsilon, \\ \eta^{(1)} = \eta_1\cos\varepsilon - \mu_1\sin\varepsilon, & \mu^{(1)} = \eta_1\sin\varepsilon + \mu_1\cos\varepsilon, \\ \zeta^{(1)} = \zeta_1\cos\varepsilon - \nu_1\sin\varepsilon, & \nu^{(1)} = \zeta_1\sin\varepsilon + \nu_1\cos\varepsilon; \end{cases}$$

en rapportant toutes les directions au système $M.TCI$, on aura de même

$$(3\,*.)\quad \begin{cases} \xi_1^{(0)} = \xi\cos\varepsilon + \lambda\sin\varepsilon, & \lambda_1^{(0)} = -\xi\sin\varepsilon + \lambda\cos\varepsilon, \\ \eta_1^{(0)} = \eta\cos\varepsilon + \mu\sin\varepsilon, & \mu_1^{(0)} = -\eta\sin\varepsilon + \mu\cos\varepsilon, \\ \zeta_1^{(0)} = \zeta\cos\varepsilon + \nu\sin\varepsilon, & \nu_1^{(0)} = -\zeta\sin\varepsilon + \nu\cos\varepsilon. \end{cases}$$

La même formule du cosinus donnera, par suite, en prenant $M.TCI$ pour système de comparaison,

$$(4.)\quad \begin{cases} a = \cos.\widehat{xx_1} = \alpha\alpha_1 + \xi\xi^{(1)} + \lambda\lambda^{(1)}, \\ b = \cos.\widehat{xy_1} = \alpha\beta_1 + \xi\eta^{(1)} + \lambda\mu^{(1)}, \\ c = \cos.\widehat{xz_1} = \alpha\gamma_1 + \xi\zeta^{(1)} + \lambda\nu^{(1)}, \\ a_1 = \cos.\widehat{yx_1} = \beta\alpha_1 + \eta\xi^{(1)} + \mu\lambda^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

et, en ayant égard aux relations (3.), il viendra

$$(4\,*.)\quad \begin{cases} a = \alpha\alpha_1 + (\xi\xi_1 + \lambda\lambda_1)\cos\varepsilon + (\lambda\xi_1 - \xi\lambda_1)\sin\varepsilon, \\ b = \alpha\beta_1 + (\xi\eta_1 + \lambda\mu_1)\cos\varepsilon + (\lambda\eta_1 - \xi\mu_1)\sin\varepsilon, \\ c = \alpha\gamma_1 + (\xi\zeta_1 + \lambda\nu_1)\cos\varepsilon + (\lambda\zeta_1 - \xi\nu_1)\sin\varepsilon; \\ a_1 = \beta\alpha_1 + (\eta\xi_1 + \mu\lambda_1)\cos\varepsilon + (\mu\xi_1 - \eta\lambda_1)\sin\varepsilon, \\ b_1 = \beta\beta_1 + (\eta\eta_1 + \mu\mu_1)\cos\varepsilon + (\mu\eta_1 - \eta\mu_1)\sin\varepsilon, \\ c_1 = \beta\gamma_1 + (\eta\zeta_1 + \mu\nu_1)\cos\varepsilon + (\mu\zeta_1 - \eta\nu_1)\sin\varepsilon; \\ a_2 = \gamma\alpha_1 + (\zeta\xi_1 + \nu\lambda_1)\cos\varepsilon + (\nu\xi_1 - \zeta\lambda_1)\sin\varepsilon, \\ b_2 = \gamma\beta_1 + (\zeta\eta_1 + \nu\mu_1)\cos\varepsilon + (\nu\eta_1 - \zeta\mu_1)\sin\varepsilon, \\ c_2 = \gamma\gamma_1 + (\zeta\zeta_1 + \nu\nu_1)\cos\varepsilon + (\nu\zeta_1 - \zeta\nu_1)\sin\varepsilon; \end{cases}$$

formules qui font connaître la direction de chacun des axes mobiles $O_1.x_1y_1z_1$ en fonctions de quantités données immédiatement par la question.

En tenant compte actuellement des expressions analytiques ordinaires de $\alpha_1\ldots$, $\xi_1\ldots$, $\nu_1\ldots$, l'introduction des valeurs précédentes dans les équations (1.) fournit, pour déterminer $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ les équations suivantes, dont la recherche faisait l'objet final du présent paragraphe,

$$(5.)\quad \begin{cases} x-\mathfrak{x} = \alpha\nabla+\left[\xi\left(\frac{d\nabla}{ds_1}-1\right)+\lambda R\right]\varrho_1\cos\varepsilon+\left[\lambda\left(\frac{d\nabla}{ds_1}-1\right)-\xi R\right]\varrho_1\sin\varepsilon, \\ y-\mathfrak{y} = \beta\nabla+\left[\eta\left(\frac{d\nabla}{ds_1}-1\right)+\mu R\right]\varrho_1\cos\varepsilon+\left[\mu\left(\frac{d\nabla}{ds_1}-1\right)-\eta R\right]\varrho_1\sin\varepsilon, \\ z-\mathfrak{z} = \gamma\nabla+\left[\zeta\left(\frac{d\nabla}{ds_1}-1\right)+\nu R\right]\varrho_1\cos\varepsilon+\left[\nu\left(\frac{d\nabla}{ds_1}-1\right)-\zeta R\right]\varrho_1\sin\varepsilon; \end{cases}$$

l'on a posé dans ces équations

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=\Delta^2,\qquad \Delta\frac{d\Delta}{ds_1}=\nabla,\qquad \mathbf{S}x_1\left(\frac{dy_1}{ds_1}\frac{d^2z_1}{ds_1^2}-\frac{dz_1}{ds_1}\frac{d^2y_1}{ds_1^2}\right)=R,$$

S étant le signe d'une somme symétrique à trois termes.

Comme, en faisant la somme des carrés des équations (5.), on doit retrouver, au premier membre, Δ^2, on obtient cette seconde expression de R, dont le signe est déterminé par celui de la première expression,

$$R=\pm\sqrt{\frac{\Delta^2-\nabla^2}{\varrho_1^2}-\left(\frac{d\nabla}{ds_1}-1\right)^2};$$

quant à cette première expression elle revient à $R=\frac{\Delta}{\varrho_1}\cos\varpi$, ϖ étant l'angle du plan osculateur de la courbe $\mathfrak{C}_1$ et de la droite Δ qui va du point de contact au point décrivant. Cette quantité R disparait par conséquent, lorsque la courbe mobile est plane et que le point décrivant appartient à son plan.

Si l'on désigne par u, v, w les coordonnées du point décrivant, rapportées aux axes *M.TCI*, on aura, d'après (5.),

$$(5\,*.)\quad \begin{cases} \mathfrak{u}=\mathbf{S}\alpha(\mathfrak{x}-x)=-\nabla, \\ \mathfrak{v}=\mathbf{S}\xi(\mathfrak{x}-x)=\left(1-\frac{d\nabla}{ds_1}\right)\varrho_1\cos\varepsilon+R\varrho_1\sin\varepsilon, \\ \mathfrak{w}=\mathbf{S}\lambda(\mathfrak{x}-x)=-R\varrho_1\cos\varepsilon+\left(1-\frac{d\nabla}{ds_1}\right)\varrho_1\sin\varepsilon. \end{cases}$$

On remarquera les deux cas particuliers de $\varepsilon=0$ ou $\varepsilon=\pi$, et de $\varepsilon=\pm\frac{\pi}{2}$ qui font disparaitre une des parenthèses de chacune des formules (5.) et simplifient le groupe (5 *.) ainsi que les cosinus (4 *.).

§. 2.

Suite du problème (I) — variation première des cosinus — axe de rotation.

En désignant par $d\omega$ et dv les angles de contingence et de torsion d'une courbe quelconque, de façon que pour la courbe $\mathfrak{C}$, par exemple,

$$d\omega = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}, \qquad dv = \sqrt{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2},$$

on a les relations différentielles, dues à M. *J. A. Serret*,

$$(6.)\quad \begin{cases} d\alpha = \xi\, d\omega, & d\lambda = -\xi\, dv, & d\xi = -\alpha\, d\omega + \lambda\, dv, \\ d\beta = \eta\, d\omega, & d\mu = -\eta\, dv, & d\eta = -\beta\, d\omega + \mu\, dv, \\ d\gamma = \zeta\, d\omega, & d\nu = -\zeta\, dv, & d\zeta = -\gamma\, d\omega + \nu\, dv, \end{cases}$$

et l'on aura des relations analogues pour la courbe $\mathfrak{C}_1$ en mettant un indice à chaque lettre. Par leur moyen on conclut des équations (3.)

$$(7.)\quad \begin{cases} d\xi^{(1)} = -\alpha_1 \cos\varepsilon\, d\omega_1 + \lambda^{(1)}(dv_1 - d\varepsilon), \quad d\lambda^{(1)} = -\alpha_1 \sin\varepsilon\, d\omega_1 - \xi^{(1)}(dv_1 - d\varepsilon), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

et par suite, la différentiation des équations (4.) fournit le tableau suivant, qui renferme les différentielles premières des cosinus,

$$(8.)\quad \begin{cases} da = (\xi\alpha_1 - \alpha\xi^{(1)})\, d\omega + (\alpha\xi_1 - \xi_1^{(0)}\alpha_1)\, d\omega_1 + (\lambda\xi^{(1)} - \xi\lambda^{(1)})\, d\theta, \\ db = (\xi\beta_1 - \alpha\eta^{(1)})\, d\omega + (\alpha\eta_1 - \xi_1^{(0)}\beta_1)\, d\omega_1 + (\lambda\eta^{(1)} - \xi\mu^{(1)})\, d\theta, \\ dc = (\xi\gamma_1 - \alpha\zeta^{(1)})\, d\omega + (\alpha\zeta_1 - \xi_1^{(0)}\gamma_1)\, d\omega_1 + (\lambda\zeta^{(1)} - \xi\nu^{(1)})\, d\theta, \\ da_1 = (\eta\alpha_1 - \beta\xi^{(1)})\, d\omega + (\beta\xi_1 - \eta_1^{(0)}\alpha_1)\, d\omega_1 + (\mu\xi^{(1)} - \eta\lambda^{(1)})\, d\theta, \\ db_1 = (\eta\beta_1 - \beta\eta^{(1)})\, d\omega + (\beta\eta_1 - \eta_1^{(0)}\beta_1)\, d\omega_1 + (\mu\eta^{(1)} - \eta\mu^{(1)})\, d\theta, \\ dc_1 = (\eta\gamma_1 - \beta\zeta^{(1)})\, d\omega + (\beta\zeta_1 - \eta_1^{(0)}\gamma_1)\, d\omega_1 + (\mu\zeta^{(1)} - \eta\nu^{(1)})\, d\theta, \\ da_2 = (\zeta\alpha_1 - \gamma\xi^{(1)})\, d\omega + (\gamma\xi_1 - \zeta_1^{(0)}\alpha_1)\, d\omega_1 + (\nu\xi^{(1)} - \zeta\lambda^{(1)})\, d\theta, \\ db_2 = (\zeta\beta_1 - \gamma\eta^{(1)})\, d\omega + (\gamma\eta_1 - \zeta_1^{(0)}\beta_1)\, d\omega_1 + (\nu\eta^{(1)} - \zeta\mu^{(1)})\, d\theta, \\ dc_2 = (\zeta\gamma_1 - \gamma\zeta^{(1)})\, d\omega + (\gamma\zeta_1 - \zeta_1^{(0)}\gamma_1)\, d\omega_1 + (\nu\zeta^{(1)} - \zeta\nu^{(1)})\, d\theta; \end{cases}$$

où l'on a posé

$$d\theta = dv - dv_1 + d\varepsilon.$$

Si, d'après (4.) et (8.), on forme le produit $b\,da$ et qu'on prenne la somme symétrique $b\,da + b_1\,da_1 + b_2\,da_2$, les termes de $b\,da$ qui renfermeront le carré d'une lettre dépourvue d'indice devront seuls être conservés dans la somme dont il s'agit où le carré de la lettre sera d'ailleurs remplacé par l'unité:

ceci résulte des relations entre cosinus analogues à (*a.*). D'après cette remarque et en se rappelant ces autres relations

$$\alpha = \eta\nu - \zeta\mu, \qquad \lambda = \beta\zeta - \gamma\eta, \qquad \xi = \gamma\mu - \beta\nu,$$

. . . .

en ayant égard à (2.),

$$(12.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt}+\alpha(\mathrm{v}_1-\mathrm{v})+\mathrm{S}x_1\dfrac{da}{dt} = 0, \\ \dfrac{d\eta}{dt}+\beta(\mathrm{v}_1-\mathrm{v})+\mathrm{S}x_1\dfrac{da_1}{dt} = 0, \\ \dfrac{d\zeta}{dt}+\gamma(\mathrm{v}_1-\mathrm{v})+\mathrm{S}x_1\dfrac{da_2}{dt} = 0. \end{cases}$$

Il en résulte pour les projections de $d\mathfrak{s}=\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}$ sur les axes $o_1.x_1y_1z_1$

$$(12^*.)\qquad \begin{cases} d\xi_1 = \Sigma a\,d\xi = [\alpha_1(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)+r_1y_1-q_1z_1]\,dt, \\ d\eta_1 = \Sigma b\,d\xi = [\beta_1(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)+p_1z_1-r_1x_1]\,dt, \\ d\zeta_1 = \Sigma c\,d\xi = [\gamma_1(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)+q_1x_1-p_1y_1]\,dt; \end{cases}$$

le Σ affectant les indices de a, b, c et en même temps l'ordre alphabétique pour ξ, η, ζ. La projection $d\mathfrak{z}$ du même déplacement $d\mathfrak{s}$ sur la direction de l'axe instantané, c'est-à-dire le glissement élémentaire minimum de tout le système mobile sera, par suite,

$$(13.)\qquad d\mathfrak{z}=\frac{1}{\Phi}\mathrm{S}p_1\,d\xi_1=\frac{\mathrm{v}-\mathrm{v}_1}{\Phi}\mathrm{S}p_1\alpha_1\,dt=(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\frac{d\theta}{\Phi}.$$

On aura donc, d'après la théorie connue, pour les équations de l'axe instantané de rotation et de glissement, rapportées aux axes $M.TC_1I_1$,

$$(14.)\qquad \begin{cases} C_1Z-I_1Y=(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\left(\dfrac{T}{\Phi}\cdot\dfrac{T}{\Phi}-1\right)=\dfrac{d\mathfrak{z}}{dt}\left(\dfrac{T}{\Phi}-\dfrac{\Phi}{T}\right), \\ I_1X-TZ=(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\dfrac{T}{\Phi}\cdot\dfrac{C_1}{\Phi}=\dfrac{d\mathfrak{z}}{dt}\cdot\dfrac{C_1}{\Phi}, \\ TY-C_1X=(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\dfrac{T}{\Phi}\cdot\dfrac{I_1}{\Phi}=\dfrac{d\mathfrak{z}}{dt}\cdot\dfrac{I_1}{\Phi}, \end{cases}$$

X, Y, Z désignant pour un moment des coordonnées courantes.

Le calcul précédent ne diffère du calcul ordinaire que par la présence des termes en $(\mathrm{v}-\mathrm{v})$. Le glissement élémentaire $d\mathfrak{z}$ est nul lorsque $\mathrm{v}=\mathrm{v}_1$, c'est-à-dire quand la courbe $\mathfrak{C}_1$ *roule*, sans glisser, sur la courbe $\mathfrak{C}$, et lorsque la loi des plans osculateurs est telle que $d\theta=0$. Dans le premier cas l'axe (1.) est de simple rotation et passe par le point de contact; dans le second cas ses équations se réduisent à $X=0$, $I_1Y-C_1Z=\mathrm{v}-\mathrm{v}_1$.

D'après les valeurs (10.), (10*.) de I_1, I on reconnait tout de suite que, si l'on prend sur l'axe MI du plan osculateur de $\mathfrak{C}$, à partir du point M, une longueur $\frac{d\omega}{dt}$, et sur le prolongement MI_1' de l'axe MI_1 du plan osculateur

de $\mathfrak{C}_1$ une longueur $\frac{d\omega_1}{dt}$, la diagonale du parallélogramme construit sur ces longueurs aura précisément pour projections orthogonales sur MI et MI_1' les composantes I et I_1. En composant cette diagonale avec la vitesse autour de la tangente $\frac{d\theta}{dt}$, on aura donc la vitesse résultante Φ. Autrement cette vitesse résultante Φ est représentée par la diagonale du parallélepipède construit sur les longueurs $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\omega_1}{dt}$, prises respectivement à partir du point M sur les directions MT, MI, MI_1'.

Il était bien facile de se rendre compte géometriquement de ce résultat et d'en déduire, par suite, toutes les formules du présent paragraphe. Si l'on considère, en effet, le trièdre $M.TT'T_1'$, dans lequel on a $TMT' = d\omega$, $TMT_1' = d\omega_1$: ces deux faces comprenant l'angle ε et les arêtes MT', MT_1' étant parallèles aux tangentes des courbes $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$ qui sont consécutives à la tangente commune MT; si l'on mène ensuite les normales *intérieures* MI, MI_1' à ces deux faces, il est bien visible que, par une rotation élémentaire $d\omega_1$ autour de MI_1', on amènera l'arète MT_1' en coïncidence avec MT. Puis, par une rotation élémentaire $d\omega$ autour de MI, on amènera MT, ou maintenant MT_1', en MT'. Enfin *la rotation élémentaire* $d\theta$ autour de MT qui peut remplacer la rotation $d\theta$ autour de l'arête infiniment voisine MT', fera prendre aux faces qui avaient l'inclinaison ε, la nouvelle inclinaison qu'elles doivent avoir. Quant à cette rotation $d\theta$, en menant, par l'arète MT et au *dessus* de chacune des faces TMT', TMT_1', des plans faisant avec elles des angles dv et dv_1 respectivement, il est clair qu'en faisant tourner, autour de MT, de l'angle $dv - dv_1$, la face TMT_1', celle-ci fera, avec le premier des plans menés, un angle précisément égal à ε: il restera à la faire tourner encore, dans le même sens (si $d\varepsilon$ est positif) de l'angle $d\varepsilon$, pour accomplir la rotation $d\theta = dv - dv_1 + d\varepsilon$. En supposant $MM' = ds$, $MM_1' = ds_1$: après les trois rotations dont on vient de parler, l'élément consécutif de ds_1 et que j'appellerai M_1m_1, se trouve évidemment parallèle à l'élément $M'm$ consécutif de ds. Si l'on fait glisser le système mobile, le long de MT, de la quantité $MM' - MM_1' = ds - ds_1$, l'élément $M_1'm_1$ se trouvera placé sur $M'm$, ayant une extrémité commune M'. Le système aura alors effectué en entier, rotation et glissement, son déplacement élémentaire. Si, avant ce glissement, on représente par $M_1'H$ une parallèle menée par M_1' à l'axe de la rotation résultante, et par M_1K une perpendiculaire à $M_1'H$ située dans le plan HM_1T et dirigée vers $M_1'T$; en construisant sur ces deux droites un rectangle dont M_1M' serait la diagonale.

le côté de ce rectangle dirigé suivant $M_1'H$ représentera le glissement minimum du système: il aura pour valeur $(ds-ds_1)\cos HM_1'T$ c'est-à-dire $(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\frac{d\theta}{\Phi}$, ce qui coïncide avec (13.). L'autre côté du rectangle aura pour valeur $(ds-ds_1)\sqrt{1-\frac{T^2}{\Phi^2}}$. L'axe de rotation et de glissement minimum est situé dans un plan perpendiculaire sur le milieu de ce côté et à une distance D telle que la rotation élémentaire Φdt, autour de cet axe, fasse parcourir à M_1' la longueur du côté considéré; d'où résulte $D=(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\sqrt{1-\frac{T^2}{\Phi^2}}$: ce qui détermine complètement la position de l'axe.

Il parait assez superflu de remonter de cette solution géométrique aux diverses formules du présent paragraphe: ce retour exigeant quelques uns des mêmes calculs effectués dans un ordre inverse.

Remarque. Les variations secondes des cosinus et par suite de ξ, η, ζ, ne présentent rien d'assez simple pour devoir être développées. On les déduit sans peine, par les formules (6.), des variations premières (8.). On peut aussi, pour trouver $d^2\xi$, $d^2\eta$, $d^2\zeta$, différentier deux fois de suite chacun des deuxièmes et troisièmes membres des équations (5.) en ayant égard chaque fois à ces mêmes équations et aux relations (6.).

§. 3.

Des problèmes (II), (III), (IV) et (V).

Dans le problème (II) on connait en fonctions du temps v_1 : x, y, z et par suite v, enfin les cosinus a, b, c .... Les équations (2.) donnent, tout de suite

$$x_1=\int\frac{\mathrm{v}_1}{\mathrm{v}}(a\,dx+a_1\,dy+a_2\,dz)+g_1,$$

$$y_1=\int\frac{\mathrm{v}_1}{\mathrm{v}}(b\,dx+b_1\,dy+b_2\,dz)+h_1,$$

$$z_1=\int\frac{\mathrm{v}_1}{\mathrm{v}}(c\,dx+c_1\,dy+c_2\,dz)+k_1,$$

g_1, h_1, k_1 étant des constantes arbitraires. Les équations (1.) font connaître ensuite les coordonnées ξ, η, ζ du point décrivant.

Dans le problème (III) les données étant v, $x_1y_1z_1$ et par suite v_1, ainsi que a, b, c ..., l'intégration immédiate des équations (2.) fournit la solution.

Dans ces deux questions, qui évidemment n'en font qu'une, on aurait pu adopter, au lieu du rapport des vitesses, quelque autre donnée propre à rendre le problème déterminé. Si l'on eut pris, par exemple, le glissement élémentaire minimum $d\mathfrak{z}$: comme les équations (10.) ou (10*.) font connaitre $d\theta$ ou Φ en fonction de quantités données, l'équation (13.) aurait donné $(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$ et l'on serait rentré dans les énoncés primitifs. Mais il serait facile de faire d'autres choix capables de compliquer passablement ces questions: ce qui m'a semblé pour le moment inutile.

Le problème (IV) présente d'autres difficultés. On connait, en fonctions du temps, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; x_1, y_1, z_1 et v. Or on conclut aisément de (1.), (12.) ou (5.)

$$(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2+(z-\mathfrak{z})^2 = \Delta^2,$$

$$(x-\mathfrak{x})\frac{dx}{dt}+(y-\mathfrak{y})\frac{d\mathfrak{y}}{dt}+(z-\mathfrak{z})\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{\mathrm{v}-\mathrm{v}_1}{\mathrm{v}_1}\cdot\Delta\frac{d\Delta}{dt},$$

à quoi il faut joindre

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2} = \mathrm{v}^2;$$

où les seules inconnues sont x, y, z. La question dépend d'une intégration unique; mais il ne parait pas possible, par un choix quelconque de variables de ramener l'équation différentielle à un type qu'on ait pu intégrer jusqu'ici, soit directement soit avec le secours d'une solution particulière.

Dans le problème (V) on connait x, y, z, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ en fonction du temps, ainsi que la vitesse instantanée de rotation Φ. Si l'on pose $\frac{\mathrm{v}_1-\mathrm{v}}{\mathrm{v}}=\psi$ et qu'on mette dans les équations (12.) pour x_1, y_1, z_1 leurs valeurs $\Sigma a(x-\mathfrak{x})$, $\Sigma b(x-\mathfrak{x})$, $\Sigma c(x-\mathfrak{x})$ déduites de (1.), on obtient

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt}+\psi\frac{dx}{dt} = r(y-\mathfrak{y})-q(z-\mathfrak{z}),$$

$$\frac{d\mathfrak{y}}{dt}+\psi\frac{dy}{dt} = p(z-\mathfrak{z})-r(x-\mathfrak{x}),$$

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt}+\psi\frac{dz}{dt} = q(x-\mathfrak{x})-p(y-\mathfrak{y});$$

d'où l'on déduit, en premier lieu,

$$\psi\,\mathrm{S}(x-\mathfrak{x})\frac{dx}{dt}+\mathrm{S}(x-\mathfrak{x})\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = 0:$$

ce qui fait connaitre ψ et par suite v_1. En second lieu, en faisant la somme des carrés des mêmes équations, on en tire

$$\mathrm{S}p(x-\mathfrak{x}) = \pm\sqrt{\Delta^2\Phi^2-\mathrm{S}\cdot\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}+\psi\frac{dx}{dt}\right)^2} = \mathrm{W}.$$

où l'on a toujours $\Delta^2 = \mathbf{S}x_1^2 = \mathbf{S}(x-\mathfrak{x})^2$. Par conséquent

$$\Delta^2 p = (x-\mathfrak{x})\mathbf{W} + (z-\mathfrak{z})\left(\frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \psi\frac{dy}{dt}\right) - (y-\mathfrak{y})\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \psi\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\Delta^2 q = (y-\mathfrak{y})\mathbf{W} + (x-\mathfrak{x})\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \psi\frac{dz}{dt}\right) - (z-\mathfrak{z})\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \psi\frac{dx}{dt}\right),$$

$$\Delta^2 r = (z-\mathfrak{z})\mathbf{W} + (y-\mathfrak{y})\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \psi\frac{dx}{dt}\right) - (x-\mathfrak{x})\left(\frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \psi\frac{dy}{dt}\right).$$

On connait, par ces formules, les composantes p, q, r en fonction du temps. On rentre dans le problème intermédiaire qui suit et qui a pour objet de déterminer, d'après ces données, les neuf cosinus a, b, c, ... Après quoi les équations (1.) donneront ici x_1, y_1, z_1.

§. 4.

Problème auxiliaire.

Etant données, en fonctions du temps, les composantes de la vitesse instantanée de rotation d'un corps solide, relatives à trois axes rectangulaires liés au corps, il s'agit de trouver les cosinus des angles que font ces axes avec trois axes rectangulaires, fixes dans l'espace.

Il est clair qu'au lieu des composantes autour des axes mobiles on pourrait se donner les composantes autour des axes fixes, sans changer le moins du monde la question. En désignant par X, Y, Z les cosinus des angles que font les trois axes mobiles avec un quelconque des axes fixes, par exemple avec l'axe des x, la solution du présent problème dépend de l'intégration des équations connues, telle que

$$(14.) \qquad \frac{dX}{dt} = RY - QZ, \quad \frac{dY}{dt} = PZ - RX, \quad \frac{dZ}{dt} = QX - PY,$$

dans lesquelles P, Q, R sont des fonctions données du temps. Si l'on pose

$$\Pi = \sqrt{P^2+Q^2+R^2}, \quad P = \Pi\mathfrak{p}, \quad Q = \Pi\mathfrak{q}, \quad R = \Pi\mathfrak{r}, \quad \int \Pi\, dt = \tau,$$

$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ étant actuellement des fonctions connues de τ qui représentent les cosinus de direction de l'axe instantané par rapport aux axes mobiles, les équations (14.) pourront s'écrire

$$(14\,*.) \qquad \frac{dX}{d\tau} = \mathfrak{r}Y - \mathfrak{q}Z, \quad \frac{dY}{d\tau} = \mathfrak{p}Z - \mathfrak{r}X, \quad \frac{dZ}{d\tau} = \mathfrak{q}X - \mathfrak{p}Y.$$

En appelant $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ les cosinus de direction de l'axe instantané par rapport aux axes fixes, de façon que, par exemple,

$$\mathfrak{p}X + \mathfrak{q}Y + \mathfrak{r}Z = \mathfrak{P}:$$

on aura, d'après (14 *.)

$$\frac{d\mathfrak{p}}{d\sigma}X+\frac{d\mathfrak{q}}{d\sigma}Y+\frac{d\mathfrak{r}}{d\sigma}Z=\frac{d\mathfrak{P}}{d\sigma},$$

$$\frac{d^2\mathfrak{p}}{d\sigma^2}X+\frac{d^2\mathfrak{q}}{d\sigma^2}Y+\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\sigma^2}Z+\frac{d\tau}{d\sigma}S.\left(\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{r}}{d\sigma}-\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{q}}{d\sigma}\right)X=\frac{d^2\mathfrak{P}}{d\sigma^2},$$

σ étant une variable quelconque. En déterminant cette variable par la condition

$$d\sigma^2=d\mathfrak{p}^2+d\mathfrak{q}^2+d\mathfrak{r}^2,$$

on tirera des deux premières équations précédentes, jointes à $X^2+Y^2+Z^2=1$, les valeurs suivantes de X, Y, Z

$$(15.)\quad\begin{cases}X=\mathfrak{p}\mathfrak{P}+\dfrac{d\mathfrak{p}}{d\sigma}\dfrac{d\mathfrak{P}}{d\sigma}\pm\left(\mathfrak{q}\dfrac{d\mathfrak{r}}{d\sigma}-\mathfrak{r}\dfrac{d\mathfrak{q}}{d\sigma}\right)\sqrt{1-\mathfrak{P}^2-\dfrac{d\mathfrak{P}^2}{d\sigma^2}},\\ Y=\mathfrak{q}\mathfrak{P}+\dfrac{d\mathfrak{q}}{d\sigma}\dfrac{d\mathfrak{P}}{d\sigma}\pm\left(\mathfrak{r}\dfrac{d\mathfrak{p}}{d\sigma}-\mathfrak{p}\dfrac{d\mathfrak{r}}{d\sigma}\right)\sqrt{1-\mathfrak{P}^2-\dfrac{d\mathfrak{P}^2}{d\sigma^2}},\\ Z=\mathfrak{r}\mathfrak{P}+\dfrac{d\mathfrak{r}}{d\sigma}\dfrac{d\mathfrak{P}}{d\sigma}\pm\left(\mathfrak{p}\dfrac{d\mathfrak{q}}{d\sigma}-\mathfrak{q}\dfrac{d\mathfrak{p}}{d\sigma}\right)\sqrt{1-\mathfrak{P}^2-\dfrac{d\mathfrak{P}^2}{d\sigma^2}},\end{cases}$$

et, en les substituant dans la troisième, on obtiendra

$$(16.)\quad\frac{d^2\mathfrak{P}}{d\sigma^2}+\mathfrak{P}=\pm f\sqrt{1-\mathfrak{P}^2-\frac{d\mathfrak{P}^2}{d\sigma^2}}:$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(17.)\quad f=\frac{d\tau}{d\sigma}+S\frac{d\mathfrak{p}}{d\sigma}\left(\mathfrak{r}\frac{d^2\mathfrak{q}}{d\sigma^2}-\mathfrak{q}\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\sigma^2}\right).$$

L'équation (16.) est absolument de même forme que celle que l'on trouverait si l'on se proposait de déterminer une courbe sphérique quand on donne le rayon de courbure en fonction de l'arc *). Si, en effet, on prend $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ pour les trois coordonnées rectangulaires d'un point de la sphère et qu'on appelle R le rayon de courbure de la courbe sphérique, on a

$$(18.)\quad\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2=1.\quad\mathfrak{p}'^2+\mathfrak{q}'^2+\mathfrak{r}'^2=1,\quad\mathfrak{p}''^2+\mathfrak{q}''^2+\mathfrak{r}''^2=\frac{1}{R^2}:$$

où les accents indiquent les dérivées par rapport à σ, supposition qui sera maintenue jusqu'à la fin du paragraphe. En différentiant deux fois la première, une fois la seconde et dégageant les dérivées secondes, on trouve, après

*) Cette question géométrique a été traitée par M. *R. Hoppe* dans le tome 60 de ce journal, page 182. J'étais arrivé, en mon particulier, aux résultats que j'ai besoin d'indiquer pour mon but actuel, en me posant précisément la question qui commence son mémoire. Mais je n'avais pas songé à la remarquable transformation par laquelle l'auteur ramène l'équation, analogue à (19.) ou (16.), à une équation linéaire du second ordre.

quelques légères transformations,

$$(19.) \qquad \mathfrak{p}''+\mathfrak{p} = \pm\sqrt{\frac{1}{R^2}-1}\sqrt{1-\mathfrak{p}^2-\mathfrak{p}'^2}$$

et deux équations tout-à-fait pareilles pour $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$.

On remarquera que de (18.) on déduit, sans peine,

$$S\,\mathfrak{p}'(\mathfrak{r}\mathfrak{q}''-\mathfrak{q}\mathfrak{r}'') = \pm\sqrt{\frac{1}{R^2}-1}, \text{ cequi permet d'écrire } f = \frac{d\tau}{d\sigma} \pm\sqrt{\frac{1}{R^2}-1}.$$

Lorsqu'on connait une solution particulière de l'équation (19.) on peut en déduire par une quadrature les valeurs correspondantes de $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$, en prenant dans la $2^{\text{ième}}$ équation (18.) les coordonnées sphériques longitude et latitude. Quant à l'intégration générale pour les trois équations (19.), elle correspond à une simple transformation de coordonnées.

Cette remarque appliquée à l'équation (16.) et aux deux analogues en $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ permettra d'adopter généralement

$$\mathfrak{P} = \sin\Psi, \qquad \mathfrak{Q} = \cos\Psi\cos\Theta, \qquad \mathfrak{R} = \cos\Psi\sin\Theta,$$

$\sin\Psi$ étant une fonction particulière qui vérifie pour $\mathfrak{P}$ l'équation (16.) et Θ étant déterminé par l'équation

$$\Theta = \int \frac{d\sigma\sqrt{1-\frac{d\Psi^2}{d\sigma^2}}}{\cos\Psi}.$$

Si l'on désigne, pour un moment, par V, V_1, V_2 les trois radicaux ambigus qui multiplient f dans l'équation (16.) et dans les deux analogues en $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$; l'addition de ces équations multipliées par $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, puis par $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{R}'$ donnera, en ayant égard à $\mathfrak{P}^2+\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{R}^2=1$, $\mathfrak{P}'^2+\mathfrak{Q}'^2+\mathfrak{R}'^2=1$, deux équations linéaires entre ces radicaux, qui fourniront, en prenant un signe déterminé pour le premier par exemple *),

$$V = \mathfrak{Q}\mathfrak{R}'-\mathfrak{R}\mathfrak{Q}', \qquad V_1 = \mathfrak{R}\mathfrak{P}'-\mathfrak{P}\mathfrak{R}', \qquad V_2 = \mathfrak{P}\mathfrak{Q}'-\mathfrak{Q}\mathfrak{P}':$$

ou bien:

$$V=\cos\Psi\sqrt{1-\Psi'^2},\ V_1=\Psi'\sin\Theta-\sqrt{1-\Psi'^2}\sin\Psi\cos\Theta,\ V_2=-\Psi'\cos\Theta-\sqrt{1-\Psi'^2}\sin\Psi\sin\Theta.$$

Ayant adopté ces valeurs, les équations (15.) et les analogues en $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$ donneront finalement pour les expressions cherchées des neuf cosinus

---

*) Ce signe peut être déterminé par la condition que, lorsque $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ coincident avec $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ respectivement, les cosinus (20.) prennent les valeurs 1, 0, 0; ....

$$(20.)\quad \begin{cases} X = \mathfrak{p}\mathfrak{P} + \mathfrak{p}'\mathfrak{P}' + (\mathfrak{q}\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}\mathfrak{q}')(\mathfrak{Q}\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}\mathfrak{Q}'), \\ Y = \mathfrak{q}\mathfrak{P} + \mathfrak{q}'\mathfrak{P}' + (\mathfrak{r}\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}\mathfrak{r}')(\mathfrak{Q}\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}\mathfrak{Q}'), \\ Z = \mathfrak{r}\mathfrak{P} + \mathfrak{r}'\mathfrak{P}' + (\mathfrak{p}\mathfrak{q}' - \mathfrak{q}\mathfrak{p}')(\mathfrak{Q}\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}\mathfrak{Q}'), \\ X_1 = \mathfrak{p}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}'\mathfrak{Q}' + (\mathfrak{q}\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}\mathfrak{q}')(\mathfrak{R}\mathfrak{P}' - \mathfrak{P}\mathfrak{R}'), \\ Y_1 = \mathfrak{q}\mathfrak{Q} + \mathfrak{q}'\mathfrak{Q}' + (\mathfrak{r}\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}\mathfrak{r}')(\mathfrak{R}\mathfrak{P}' - \mathfrak{P}\mathfrak{R}'), \\ Z_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{Q} + \mathfrak{r}'\mathfrak{Q}' + (\mathfrak{p}\mathfrak{q}' - \mathfrak{q}\mathfrak{p}')(\mathfrak{R}\mathfrak{P}' - \mathfrak{P}\mathfrak{R}'), \\ X_2 = \mathfrak{p}\mathfrak{R} + \mathfrak{p}'\mathfrak{R}' + (\mathfrak{q}\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}\mathfrak{q}')(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}' - \mathfrak{Q}\mathfrak{P}'), \\ Y_2 = \mathfrak{q}\mathfrak{R} + \mathfrak{q}'\mathfrak{R}' + (\mathfrak{r}\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}\mathfrak{r}')(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}' - \mathfrak{Q}\mathfrak{P}'), \\ Z_2 = \mathfrak{r}\mathfrak{R} + \mathfrak{r}'\mathfrak{R}' + (\mathfrak{p}\mathfrak{q}' - \mathfrak{q}\mathfrak{p}')(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}' - \mathfrak{Q}\mathfrak{P}'). \end{cases}$$

Il est bien facile de reconnaître que ces expressions satisfont aux relations ordinaires (*a.*) entre cosinus; et qu'on obtiendra les intégrales générales des équations (14 *.) et des six autres analogues, par une simple transformation de coordonnées rectangulaires, appliquée aux mêmes expressions, mais qui est ici insignifiante. On remarquera que, d'après (20.) les équations (14*.) peuvent s'écrire

$$(21.)\quad \begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = \mathfrak{p}'(\mathfrak{Q}\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}\mathfrak{Q}') - \mathfrak{P}'(\mathfrak{q}\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}\mathfrak{q}'), \\ \frac{dY}{d\tau} = \mathfrak{q}'(\mathfrak{Q}\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}\mathfrak{Q}') - \mathfrak{P}'(\mathfrak{r}\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}\mathfrak{r}'), \\ \frac{dZ}{d\tau} = \mathfrak{r}'(\mathfrak{Q}\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}\mathfrak{Q}') - \mathfrak{P}'(\mathfrak{p}\mathfrak{q}' - \mathfrak{q}\mathfrak{p}'), \\ \frac{dX_1}{d\tau} = \mathfrak{p}'(\mathfrak{R}\mathfrak{P}' - \mathfrak{P}\mathfrak{R}') - \mathfrak{Q}'(\mathfrak{q}\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}\mathfrak{q}'), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

et présentent sous une forme particulière les variations des cosinus.

Je me réduirai ici à une unique application, extrêmement simple, des formules précédentes. En désignant par α, β deux constantes, on vérifiera les diverses conditions (16.), (17.), (18.) en prenant

$$\mathfrak{p} = \sin\alpha, \qquad \mathfrak{P} = \sin\beta,$$

$$\mathfrak{q} = \cos\alpha\cos\left(\frac{\sigma}{\cos\alpha}\right), \qquad \mathfrak{Q} = \cos\beta\cos\left(\frac{\sigma}{\cos\beta}\right), \qquad \sigma = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(-\alpha+\beta)}\int \Pi\, dt,$$

$$\mathfrak{r} = \cos\alpha\,\sin\left(\frac{\sigma}{\cos\alpha}\right), \qquad \mathfrak{R} = \cos\beta\,\sin\left(\frac{\sigma}{\cos\beta}\right),$$

et l'on pourra adopter pour Π telle fonction de t que l'on voudra. L'axe

instantané décrit un cône droit dans l'espace absolu et un autre cône droit dans l'intérieur du corps, en supposant qu'un de ses points demeure fixe. En supposant de plus $\Pi = n =$ constante, on est dans le cas des cônes *circulaires roulants* (uniformément). On aura, quelque soit Π,

$$X = \cos(\alpha-\beta),$$

$$Y = -\sin(\alpha-\beta)\cos\left(\frac{\sigma}{\cos\alpha}\right),$$

$$Z = -\sin(\alpha-\beta)\sin\left(\frac{\sigma}{\cos\alpha}\right),$$

$$X_1 = \sin(\alpha-\beta)\cos\left(\frac{\sigma}{\cos\beta}\right),$$

$$Y_1 = \sin\left(\frac{\sigma}{\cos\alpha}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{\cos\beta}\right)+\cos(\alpha-\beta)\cos\left(\frac{\sigma}{\cos\alpha}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{\cos\beta}\right),$$

$$Z_1 = -\cos\left(\frac{\sigma}{\cos\alpha}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{\cos\beta}\right)+\cos(\alpha-\beta)\sin\left(\frac{\sigma}{\cos\alpha}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{\cos\beta}\right),$$

$$X_2 = \sin(\alpha-\beta)\sin\left(\frac{\sigma}{\cos\beta}\right),$$

$$Y_2 = -\sin\left(\frac{\sigma}{\cos\alpha}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{\cos\beta}\right)+\cos(\alpha-\beta)\cos\left(\frac{\sigma}{\cos\alpha}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{\cos\beta}\right),$$

$$Z_2 = \cos\left(\frac{\sigma}{\cos\alpha}\right)\cos\left(\frac{\sigma}{\cos\beta}\right)+\cos(\alpha-\beta)\sin\left(\frac{\sigma}{\cos\alpha}\right)\sin\left(\frac{\sigma}{\cos\beta}\right).$$

§. 5.

Problème (VI) — sa réduction au problème précédent.

Dans le problème (VI) on connait, en fonctions du temps, x, y, z et les cosinus a, b, c ..., c'est-à-dire qu'on est dans le cas où le mouvement d'un corps solide est tout-à-fait donné. On ajoute à ces données celle du rapport $\frac{v_1 - v}{v_1} = \varphi(t)$, sorte de coëfficient de glissement des deux courbes inconnues $(x\,y\,z)$, $(x_1\,y_1\,z_1)$. Par l'introduction de cette quantité, les équations (12*.) peuvent s'écrire

$$(22.)\qquad \begin{cases} \varphi\dfrac{dx_1}{dt} = r_1 y_1 - q_1 z_1 - \dfrac{dx_1}{dt}, \\ \varphi\dfrac{dy_1}{dt} = p_1 z_1 - r_1 x_1 - \dfrac{dy_1}{dt}, \\ \varphi\dfrac{dz_1}{dt} = q_1 x_1 - p_1 y_1 - \dfrac{dz_1}{dt}. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$Xx_1+Yy_1+Zz_1 = U,$$

et qu'on détermine les fonctions inconnues X, Y, Z par les conditions

$$\varphi\frac{dX}{dt}=r_1Y-q_1Z,\quad \varphi\frac{dY}{dt}=p_1Z-r_1X,\quad \varphi\frac{dZ}{dt}=q_1X-p_1Y;$$

il en résultera

$$\varphi\frac{dU}{dt} = -X\frac{dx_1}{dt}-Y\frac{dy_1}{dt}-Z\frac{dz_1}{dt},$$

et par suite

$$U = -\int\frac{1}{\varphi}(X\,dx_1+Y\,dy_1+Z\,dz_1)+g,$$

g étant une constante arbitraire. Or on fera coïncider les équations de condition avec (14 *.) en prenant

$$\mathfrak{p}=\frac{p_1}{\Phi},\quad \mathfrak{q}=\frac{q_1}{\Phi},\quad \mathfrak{r}=\frac{r_1}{\Phi}\quad \text{où}\quad \Phi=\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2},\quad \text{et}\quad \tau=\int\frac{\Phi\,dt}{\varphi}.$$

Donc, en adoptant spécialement les valeurs (20.), on aura

$$\begin{aligned} X\,x_1+Y\,y_1+Z\,z_1 &= U,\\ X_1x_1+Y_1y_1+Z_1z_1 &= U_1,\\ X_2x_1+Y_2y_1+Z_2z_1 &= U_2; \end{aligned}$$

d'où

$$(23.)\qquad \begin{cases} x_1 = XU+X_1U_1+X_2U_2,\\ y_1 = YU+Y_1U_1+Y_2U_2,\\ z_1 = ZU+Z_1U_1+Z_2U_2; \end{cases}$$

U, U_1, U_2 ayant les valeurs suivantes

$$(24.)\qquad \begin{cases} U = -\int\frac{1}{\varphi}(X\,dx_1+Y\,dy_1+Z\,dz_1)+g,\\ U_1 = -\int\frac{1}{\varphi}(X_1dx_1+Y_1dy_1+Z_1dz_1)+h,\\ U_2 = -\int\frac{1}{\varphi}(X_2dx_1+Y_2dy_1+Z_2dz_1)+k, \end{cases}$$

où g, h, k sont des constantes arbitraires. En posant

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}a\,X=A,\quad \mathrm{S}a\,X_1=B,\quad \mathrm{S}a\,X_2=C,\\ &\mathrm{S}a_1X=A_1,\quad \mathrm{S}a_1X_1=B_1,\quad \mathrm{S}a_1X_2=C_1,\\ &\mathrm{S}a_2X=A_2,\quad \mathrm{S}a_2X_1=B_2,\quad \mathrm{S}a_2X_2=C_2, \end{aligned}$$

les expressions (24.) pourront s'écrire, en se reportant à (12 *.),

$$(24\,*.)\qquad \begin{cases} U = -\int \frac{1}{\varphi}(A dx + A_1 d\mathfrak{y} + A_2 d\mathfrak{z}) + g, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

et correspondront plus directement aux valeurs de x, y, z fournies par (1.) savoir

$$x = \mathfrak{x} + AU + BU_1 + CU_2$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Si l'on désigne par $+u$, $+u_1$, $+u_2$ les parties des seconds membres (24.) ou (24 *.) qui dépendent du signe $\int$ et qu'on pose

$$\mathfrak{x}^{(0)} = \mathfrak{x} + Au + Bu_1 + Cu_2, \quad \mathfrak{x}_1^{(0)} = Xu + X_1 u_1 + X_2 u_2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,$$

on aura

$$(25.)\qquad \begin{cases} x = \mathfrak{x}^{(0)} + A\,g + B\,h + C\,k, & x_1 = \mathfrak{x}_1^{(0)} + Xg + X_1 h + X_2 k, \\ y = \mathfrak{y}^{(0)} + A_1 g + B_1 h + C_1 k, & y_1 = \mathfrak{y}_1^{(0)} + Yg + Y_1 h + Y_2 k, \\ z = \mathfrak{z}^{(0)} + A_2 g + B_2 h + C_2 k, & z_1 = \mathfrak{z}_1^{(0)} + Zg + Z_1 h + Z_2 k; \end{cases}$$

ces équations montrent que, si l'on considère un système rectangulaire $\Omega . GHK$ (ou corps solide) dont le mouvement serait défini par la courbe absolue $(\mathfrak{x}^{(0)}\mathfrak{y}^{(0)}\mathfrak{z}^{(0)})$, décrite par l'origine Ω, et dont les axes ΩG, ΩH, ΩK feraient avec ox, oy, oz successivement des angles aux cosinus A, B, C; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; un point quelconque lié à ce système auxiliaire, tracerait, dans l'espace absolu, la courbe (xyz) ou $\mathfrak{C}$, tandis que le même point (g, h, k), pour un observateur entrainé avec le système $o_1 . x_1 y_1 z_1$ décrirait la courbe apparente (x_1, y_1, z_1) ou $\mathfrak{C}_1$. En prenant pour g, h, k des fonctions quelconques d'un paramètre arbitraire k, on aura une courbe C, liée au système auxiliaire et qui engendrera une surface absolue $\mathfrak{S}$ dans le système $o . xyz$ et une surface relative $\mathfrak{S}_1$ dans le système $o_1 . x_1 y_1 z_1$. Ces deux surfaces seront tangentes le long des courbes $t =$ constante ou (t), et $\mathfrak{S}_1$ en glissant et roulant sur $\mathfrak{S}$, suivant une loi connue, produira précisément le mouvement dont $o_1 . x_1 y_1 z_1$ est animé.

Comme chaque point de la génératrice fixe C décrit une courbe individuelle k = constante ou (k), soit dans $\mathfrak{S}$, soit dans $\mathfrak{S}_1$; deux quelconques des courbes (k) interceptent évidemment des longueurs égales sur toute la série des courbes (t).

Deux courbes (t) et (k) se coupent sous un angle généralement variable avec t et k. Car des équations (22.), (23.) on conclut

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = \frac{d\tau}{d\sigma}(\mathfrak{r}y_1 - \mathfrak{q}z_1) - \frac{d\mathfrak{x}_1}{\varphi\, d\sigma}, \quad \frac{dx_1}{d\mathrm{k}} = X\frac{dg}{d\mathrm{k}} + X_1\frac{dh}{d\mathrm{k}} + X_2\frac{dk}{d\mathrm{k}};$$

d'où

$$\mathbf{S}\frac{dx_1}{d\sigma}\frac{dx_1}{d\mathrm{k}} = \mathbf{S}\frac{dg}{d\mathrm{k}}\left[\frac{d\tau}{d\sigma}\mathbf{S}X(\mathfrak{r}y_1 - \mathfrak{q}z_1) + \frac{dU}{d\sigma}\right]:$$

cequi, en ayant égard à (23.), (20.) se réduit, après quelques transformations, à

$$(26.) \qquad \mathbf{S}\frac{dx_1}{d\sigma}\frac{dx_1}{d\mathrm{k}} = \mathbf{S}\frac{dg}{d\mathrm{k}}\left[\frac{dU}{d\sigma} + \frac{d\tau}{d\sigma}(\mathfrak{R}U_1 - \mathfrak{Q}U_2)\right];$$

et, en divisant par le produit $\sqrt{\mathbf{S}\frac{dx_1^2}{d\sigma^2}}\cdot\sqrt{\mathbf{S}\frac{dx_1^2}{d\mathrm{k}^2}}$, on aura une expression assez simple du cosinus de l'angle des courbes (t) et (k). En supposant ce cosinus donné et égal à $F(t, \mathrm{k})$ et conçevant g, h, k, F développées suivant les puissances de k, la comparaison des mêmes puissances de k donnera les conditions qui doivent être remplies pour l'existence de l'égalite supposée.

La détermination des courbes $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$ ou des surfaces $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$ dépend en dernière analyse de la connaissance d'une solution particulière de l'équation (16.). On pourra, dans tous les cas, disposer de φ de manière à avoir la solution requise; car l'équation (17.) étant ici $f = \frac{\Phi}{\varphi}\frac{dt}{d\sigma} \pm \sqrt{\frac{1}{\mathrm{R}^2} - 1}$, il n'y aura qu'à prendre pour $\mathfrak{P}$ dans l'équation (16.) une fonction quelconque de σ ou de t et déterminer f, et par suite φ, d'après cette même équation.

Tout ce qu'on vient de dire est pour ainsi dire illusoire, en grande partie, lorsque $\mathrm{v} = \mathrm{v}_1$ c'est-à-dire quand $\varphi = 0$. Alors, sous la condition $\mathbf{S}p_1\frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} = 0$ qui résulte de (22.) et qui, d'après (13.), fait disparaître tout glissement dans le système, ces équations (22.) peuvent s'écrire

$$\left.\begin{aligned} \Phi x_1 &= p_1\mathrm{w} + q_1\frac{d\mathfrak{z}_1}{\Phi\, dt} - r_1\frac{d\mathfrak{y}_1}{\Phi\, dt} \\ \Phi y_1 &= q_1\mathrm{w} + r_1\frac{d\mathfrak{x}_1}{\Phi\, dt} - p_1\frac{d\mathfrak{z}_1}{\Phi\, dt} \\ \Phi z_1 &= r_1\mathrm{w} + p_1\frac{d\mathfrak{y}_1}{\Phi\, dt} - q_1\frac{d\mathfrak{x}_1}{\Phi\, dt} \end{aligned}\right\} \text{ cequi entraine } \left\{\begin{aligned} \Phi(x - \mathfrak{x}) &= p\mathrm{w} + q\frac{d\mathfrak{z}}{\Phi\, dt} - r\frac{d\mathfrak{y}}{\Phi\, dt}, \\ \Phi(y - \mathfrak{y}) &= q\mathrm{w} + r\frac{d\mathfrak{x}}{\Phi\, dt} - p\frac{d\mathfrak{z}}{\Phi\, dt}, \\ \Phi(z - \mathfrak{z}) &= r\mathrm{w} + p\frac{d\mathfrak{y}}{\Phi\, dt} - q\frac{d\mathfrak{x}}{\Phi\, dt}; \end{aligned}\right.$$

où w est une indéterminée qui peut désigner la longueur variable de la génératrice indéfinie commune aux deux surfaces réglées que représentent respectivement ces deux groupes d'équations *). En donnant à w diverses valeurs

*) On peut étudier ces surfaces réglées en se servant par exemple des formules, que j'ai indiquées dans un mémoire inséré au tome 62 pag. 174 de ce journal.

constantes on aura, chaque fois deux courbes conjuguées $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}_1$; et les surfaces $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}$ ne seront autres que ces deux surfaces déterminées.

Excluant tout-à-fait ce cas singulier, j'indiquerai pour terminer, une propriété, digne de remarque, du système fictif ou *composé* $\Omega.GHK$. D'après les valeurs ci-dessus de A, B, C, ... on a successivement

$$\Sigma B\frac{dA}{dt}=\mathrm{S}X(r_1Y_1-q_1Z_1)+\mathrm{S}X_1\frac{dX}{dt}=\varphi\,\mathrm{S}X\frac{dX_1}{dt}+\mathrm{S}X_1\frac{dX}{dt}=\frac{(\varphi-1)\Phi}{\varphi}\mathfrak{R}:$$

c'est-à-dire que les composantes de la rotation instantanée du système $\Omega.GHK$ autour des axes ΩG, ΩH, ΩK sont respectivement

$$\frac{(\varphi-1)\Phi}{\varphi}\cdot\mathfrak{P},\quad\frac{(\varphi-1)\Phi}{\varphi}\cdot\mathfrak{Q},\quad\frac{(\varphi-1)\Phi}{\varphi}\cdot\mathfrak{R}.$$

La vitesse résultante est $\dfrac{(\varphi-1)\Phi}{\varphi}$, et l'on conclut pour ses composantes, autour des axes fixes $o.xyz$,

$$\frac{\varphi-1}{\varphi}\cdot p,\quad\frac{\varphi-1}{\varphi}\cdot q,\quad\frac{\varphi-1}{\varphi}\cdot r;$$

et, autour des axes mobiles $o_1.x_1y_1z_1$,

$$\frac{\varphi-1}{\varphi}\cdot p_1,\quad\frac{\varphi-1}{\varphi}\cdot q_1,\quad\frac{\varphi-1}{\varphi}\cdot r_1.$$

L'axe de la rotation instantané du système composé $\Omega.GHK$ est donc parallèle à celui de la rotation du système donné $o_1.x_1y_1z_1$. Il en résulte pour le glissement élémentaire minimum relatif à ce même système composé : $\dfrac{\varphi-1}{\varphi}\cdot d\mathfrak{g}$. $d\mathfrak{g}$ étant celui (13.) qui répond à $o_1.x_1y_1z_1$.

La simplicité de ce résultat tient surtout aux relations particulières qui existent ici entre les cosinus a, b ... X, Y .... On peut néanmoins le rattacher à un fait un peu plus général et qui est relatif à une certaine composition des systèmes rectangulaires. Soient trois pareils systèmes:

$o.x_1y_1z$, aux cosinus $\begin{Bmatrix}a & b & c\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{Bmatrix}$; $o.x_2y_2z_2$, id $\begin{Bmatrix}\mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c}\\ \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 & \mathrm{c}_1\\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{c}_2\end{Bmatrix}$; $o.\mathrm{xyz}$, id $\begin{Bmatrix}A & B & C\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{Bmatrix}$;

où

$$\begin{aligned}A&=\Sigma a\,\mathrm{a}, & A_1&=\Sigma b\,\mathrm{a}, & A_2&=\Sigma c\,\mathrm{a},\\ B&=\Sigma a\,\mathrm{b}, & B_1&=\Sigma b\,\mathrm{b}, & B_2&=\Sigma c\,\mathrm{b},\\ C&=\Sigma a\,\mathrm{c}, & C_1&=\Sigma b\,\mathrm{c}, & C_2&=\Sigma c\,\mathrm{c};\end{aligned}$$

les cosinus de ces trois systèmes se rapportant à un système fixe $o.xyz$, par

rapport au quel le système composé $o.\mathrm{xyz}$ est dès lors situé de la même manière que $o.x_2y_2z_2$ par rapport à $o.x_1y_1z_1$ (composition un peu différente de cette qui précède). En désignant par $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$ les vitesses instantanées de rotation relatives à $o.x_1y_1z_1$ et $o.x_2y_2z_2$, on obtiendra, à peu près comme ci-dessus,

$$\Psi_x = \Phi^{(2)}_{x_2} - \Phi^{(1)}_{x_2}, \qquad \Psi_x = \Phi^{(2)}_{x_1} - \Phi^{(1)}_{x_1},$$
$$\Psi_y = \Phi^{(2)}_{y_2} - \Phi^{(1)}_{y_2}, \qquad \Psi_y = \Phi^{(2)}_{y_1} - \Phi^{(1)}_{y_1},$$
$$\Psi_z = \Phi^{(2)}_{z_2} - \Phi^{(1)}_{z_2}, \qquad \Psi_z = \Phi^{(2)}_{z_1} - \Phi^{(1)}_{z_1},$$

Ψ étant la vitesse instantanée qui correspond au système composé et les lettres placées en indices indiquant les directions suivant lesquelles les vitesses sont estimées.

On vient de voir par quelles relations simples le mouvement de rotation et le glissement minimum du système fictif $\Omega.GHK$ étaient liés à celui du système donné $o_1.x_1y_1z_1$. Quant aux *directrices* correspondantes $(\mathfrak{x}^{(0)}\,\mathfrak{y}^{(0)}\,\mathfrak{z}^{(0)})$ et $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})$, leur simplicité relative dépend d'un plus grand nombre d'éléments. Elles sont liées néanmoins par une certaine réciprocité analytique qu'on pouvait prévoir et qu'on établit en cherchant à déterminer la seconde quand la première est donnée. Si l'on se reporte, pour cela, aux valeurs ci-dessus de $\mathfrak{x}^{(0)}\,\mathfrak{y}^{(0)}\,\mathfrak{z}^{(0)}$ en u, u_1, u_2, l'isolement et la différentiation de ces dernières quantités donne sans peine, en ayant égard à $\mathrm{S}A\frac{dA_1}{dt} = \frac{\varphi-1}{\varphi}\cdot r$, . . . , les équations

$$(27.) \qquad \begin{cases} \dfrac{d(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(0)})}{dt} = q(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}^{(0)}) - r(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}^{(0)}) - \dfrac{d\mathfrak{x}^{(0)}}{(1-\varphi)\,dt}, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

qu'on pouvait aussi déduire de (22.) en chassant x, y, z de ces dernières au moyen de (1.) et (2.) et remarquant que $\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(0)}$, $\mathfrak{y}-\mathfrak{y}^{(0)}$, $\mathfrak{z}-\mathfrak{z}^{(0)}$ devaient former, pour x, y, z, une solution particulière des équations ainsi obtenues. Les équations (27.) étant de même forme que (22.) on peut leur appliquer tout ce qui a été dit à l'égard de ce dernier système. Or leur comparaison avec les relations identiques

$$\frac{da}{dt} = a_2q - a_1r, \qquad \frac{da_1}{dt} = ar - a_2p, \qquad \frac{da_2}{dt} = a_1p - aq,$$

et les six analogues, permet ici de prendre

$$a(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(0)}) + a_1(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}^{(0)}) + a_2(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}^{(0)}) = \mathfrak{U},$$
$$b(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(0)}) + b_1(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}^{(0)}) + b_2(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}^{(0)}) = \mathfrak{U}_1,$$
$$c(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(0)}) + c_1(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}^{(0)}) + c_2(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}^{(0)}) = \mathfrak{U}_2,$$

d'où

$$\begin{aligned} x-x^{(0)} &= a\,\mathfrak{U}+b\,\mathfrak{U}_1+c\,\mathfrak{U}_2,\\ y-y^{(0)} &= a_1\mathfrak{U}+b_1\mathfrak{U}_1+c_1\mathfrak{U}_2,\\ z-z^{(0)} &= a_2\mathfrak{U}+b_2\mathfrak{U}_1+c_2\mathfrak{U}_2, \end{aligned}$$

$\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ ayant les valeurs suivantes, dans lesquelles $g^{(0)}$, $h^{(0)}$, $k^{(0)}$ sont des constantes arbitraires,

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= -\int\frac{1}{1-\varphi}(a\,dx^{(0)}+a_1\,dy^{(0)}+a_2\,dz^{(0)})+g^{(0)},\\ \mathfrak{U}_1 &= -\int\frac{1}{1-\varphi}(b\,dx^{(0)}+b_1\,dy^{(0)}+b_2\,dz^{(0)})+h^{(0)},\\ \mathfrak{U}_2 &= -\int\frac{1}{1-\varphi}(c\,dx^{(0)}+c_1\,dy^{(0)}+c_2\,dz^{(0)})+k^{(0)}. \end{aligned}$$

§. 6.

Exemples. Remarques.

Pour ne pas nuire à la connexion que pouvaient admettre les divers problèmes précédents, j'ai renvoyé à un paragraphe séparé quelques exemples qui se rapportent aux problèmes extrèmes (VI) et (I) et qu'on peut, en quelque sorte, regarder comme de simples applications numériques.

Exemples du problème (VI). I. En supposant

$$\varphi=\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)\sin\beta},\quad \sigma=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\int\Phi\,dt,\quad \frac{\sigma}{\sin\alpha}=\sigma_\alpha,\quad \frac{\sigma}{\sin\beta}=\sigma_\beta,\quad \frac{\sigma}{\sin\gamma}=\sigma_\gamma,$$

où α, β, γ sont des constantes, il est facile de voir qu'on pourra prendre simultanément

$$\begin{cases} \frac{p_1}{\Phi}=\cos\alpha,\\ \frac{q_1}{\Phi}=\sin\alpha\cos\sigma_\alpha,\\ \frac{r_1}{\Phi}=\sin\alpha\sin\sigma_\alpha, \end{cases}\qquad \begin{cases} \frac{p}{\Phi}=\cos\beta,\\ \frac{q}{\Phi}=\sin\beta\cos\sigma_\beta,\\ \frac{r}{\Phi}=\sin\beta\sin\sigma_\beta, \end{cases}\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}=\cos\gamma,\\ \mathfrak{Q}=\sin\gamma\cos\sigma_\gamma,\\ \mathfrak{R}=\sin\gamma\sin\sigma_\gamma; \end{cases}$$

le système des cosinus donnés étant

$$\begin{aligned} a &= \cos(\alpha-\beta),\\ b &= \sin(\alpha-\beta)\cos\sigma_\alpha,\\ c &= \sin(\alpha-\beta)\sin\sigma_\alpha, \end{aligned}$$

$$a_1 = -\sin(\alpha-\beta)\cos\sigma_\beta,$$
$$b_1 = -\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos(\sigma_\alpha+\sigma_\beta)+\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos(\sigma_\alpha-\sigma_\beta),$$
$$c_1 = -\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin(\sigma_\alpha+\sigma_\beta)+\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin(\sigma_\alpha-\sigma_\beta),$$

$$a_2 = -\sin(\alpha-\beta)\sin\sigma_\beta,$$
$$b_2 = -\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin(\sigma_\alpha+\sigma_\beta)-\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin(\sigma_\alpha-\sigma_\beta),$$
$$c_2 = \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos(\sigma_\alpha+\sigma_\beta)+\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos(\sigma_\alpha-\sigma_\beta),$$

formules qui ne diffèrent de celles, fin du §. 4, que par un léger changement de forme. Si l'on désigne ce système donné par l'égalité symbolique

$$(a\,b\,\ldots\,c_2) = (\alpha,\beta),$$

on aura, pour les cosinus calculés, deux égalités pareillement symboliques

$$(X\,Y\,\ldots\,Z_2)=(\alpha,\gamma), \qquad (A\,B\,\ldots\,C_2)=(\gamma,\beta),$$

déduites de la précédente, comme les systèmes représentés, par de simples changements de lettres: ce que la notation indique suffisamment. Pour achever l'exemple, soient

$$x=0, \quad y=R\cos m\sigma, \quad z=R\sin m\sigma,$$

m et R étant des constantes. Alors on trouvera

$$x^{(0)} = \mathrm{A}\cos(m\sigma-\sigma_\beta),$$
$$y^{(0)} = \mathrm{B}\cos m\sigma+\mathrm{C}\cos(m\sigma-2\sigma_\beta),$$
$$z^{(0)} = \mathrm{B}\sin m\sigma-\mathrm{C}\sin(m\sigma-2\sigma_\beta);$$

où

$$\mathrm{A} = \frac{Rm\sin(\gamma-\beta)}{\varphi D\sin\gamma}\left(m-\frac{1}{\sin\beta}-\frac{\cos(\gamma-\beta)}{\sin\gamma}\right),$$
$$\mathrm{B}-R = \frac{Rm}{\varphi D}\left(\frac{1+\sin^2(\gamma-\beta)}{4\sin^2\gamma}-\left(m-\frac{1}{\sin\beta}-\frac{\cos(\gamma-\beta)}{2\sin\gamma}\right)^2\right),$$
$$\mathrm{C} = \frac{Rm\sin^2(\gamma-\beta)}{2\varphi D\sin^2\gamma},$$
$$D = \left(m-\frac{1}{\sin\beta}\right)\left(\left(m-\frac{1}{\sin\beta}\right)^2-\frac{1}{\sin^2\gamma}\right);$$

valeurs qu'on pourra vérifier au moyen des équations (27.), ainsi que cela

peut se pratiquer dans tous les cas. Enfin on aura

$$\mathfrak{x}_1^{(0)} = A_1 \cos(m\sigma - \sigma_\beta),$$

$$\mathfrak{y}_1^{(0)} = B_1 \cos(m\sigma - \sigma_\beta + \sigma_\alpha) + C_1 \cos(m\sigma - \sigma_\beta - \sigma_\alpha),$$

$$\mathfrak{z}_1^{(0)} = B_1 \sin(m\sigma - \sigma_\beta + \sigma_\alpha) - C_1 \sin(m\sigma - \sigma_\beta - \sigma_\alpha),$$

où

$$A_1 = \frac{Rm}{\varphi D}\left(\sin(\alpha-\beta)\left(m-\frac{1}{\sin\beta}\right)^2 - \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\gamma}\left(m-\frac{1}{\sin\beta}\right) - \frac{\cos(\alpha-\gamma)\sin(\gamma-\beta)}{\sin^2\gamma}\right).$$

$$B_1 = \frac{Rm}{\varphi D}\left(-\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(m-\frac{1}{\sin\beta}\right)^2 + \frac{\cos\left(\gamma-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\gamma}\left(m-\frac{1}{\sin\beta}\right) - \frac{\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}{2\sin^2\gamma}\right),$$

$$C_1 = \frac{Rm}{\varphi D}\left(\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(m-\frac{1}{\sin\beta}\right)^2 + \frac{\sin\left(\gamma-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\gamma}\left(m-\frac{1}{\sin\beta}\right) - \frac{\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}{2\sin^2\gamma}\right).$$

Les valeurs complètes de x, y, z; x_1, y_1, z_1 s'obtiendront tout de suite au moyen de (25.).

Les courbes $(x^{(0)}\,y^{(0)}\,z^{(0)})$, $(x_1^{(0)}\,y_1^{(0)}\,z_1^{(0)})$ qu'on vient de trouver sont les plus simples de celles qui, en roulant, et glissant uniformement l'une sur l'autre, produiraient le mouvement de *précession des équinoxes*, en supposant à Φ et aux constantes les valeurs connues et négligeant la nutation, ainsi que l'ellipticité de l'orbite. La première courbe est censée liée au soleil, l'autre à la terre. On peut remarquer qu'elles appartiennent respectivement aux surfaces de révolution du second degré

$$y^{(0)2} + z^{(0)2} - \frac{4BC}{A^2}x^{(0)2} = (B-C)^2, \quad y_1^{(0)2} + z_1^{(0)2} - \frac{4B_1C_1}{A_1^2}x_1^{(0)2} = (B_1-C_1)^2,$$

que leur rectification dépend d'une transcendante elliptique de seconde espèce etc. Leur déplacement relatif et leurs éléments principaux peuvent être étudiés plus intimément au moyen des formules du §. 2: ce qui me parait actuellement inutile.

II. Soient:

$$p_1 = 0, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = n; \quad p = n\sin\lambda, \quad q = 0, \quad r = n\cos\lambda;$$

φ constant, et

$$\mathfrak{z} = 0, \quad \mathfrak{x} = R\cos mt, \quad \mathfrak{y} = R\sin mt:$$

de façon que le mouvement donné est celui de la terre autour du soleil, abstraction faite de toute espèce d'inégalité et en supposant l'orbite circulaire. En posant: $1-\frac{1}{\varphi} = \frac{n_1}{n}$, on aura, par la considération directe des équations (22.),

$$\begin{aligned}
a &= -\cos\lambda\sin nt, & X &= -\cos\lambda\sin\frac{nt}{\varphi}, & A &= \sin^2\lambda + \cos^2\lambda\cos n_1 t,\\
b &= -\cos\lambda\cos nt, & Y &= -\cos\lambda\cos\frac{nt}{\varphi}, & B &= -\cos\lambda\sin n_1 t,\\
c &= \sin\lambda, & Z &= \sin\lambda, & C &= \sin\lambda\cos\lambda - \sin\lambda\cos\lambda\cos n_1 t,\\
a_1 &= \cos nt, & X_1 &= \cos\frac{nt}{\varphi}, & A_1 &= \cos\lambda\sin n_1 t,\\
b_1 &= -\sin nt, & Y_1 &= -\sin\frac{nt}{\varphi}, & B_1 &= \cos n_1 t,\\
c_1 &= 0, & Z_1 &= 0, & C_1 &= -\sin\lambda\sin n_1 t,\\
a_2 &= \sin\lambda\sin nt, & X_2 &= \sin\lambda\sin\frac{nt}{\varphi}, & A_2 &= \sin\lambda\cos\lambda - \sin\lambda\cos\lambda\cos n_1 t,\\
b_2 &= \sin\lambda\cos nt, & Y_2 &= \sin\lambda\cos\frac{nt}{\varphi}, & B_2 &= \sin\lambda\sin n_1 t,\\
c_2 &= \cos\lambda, & Z_2 &= \cos\lambda, & C_2 &= \cos^2\lambda + \sin^2\lambda\cos n_1 t.
\end{aligned}$$

Ensuite, par la théorie exposée ou par (27.), on obtiendra

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}^{(1)} &= \frac{Rn_1}{n(n_1^2-m^2)}\left(n_1^2 - m^2 + (n-n_1)\cos\lambda\,(m+n_1\cos\lambda)\right)\cos mt,\\
\mathfrak{y}^{(1)} &= \frac{Rn_1}{n(n_1^2-m^2)}\left(nn_1 - m^2 + m(n-n_1)\cos\lambda\right)\sin mt,\\
\mathfrak{z}^{(1)} &= -\frac{Rn_1(n-n_1)}{n(n_1^2-m^2)}(m+n_1\cos\lambda)\sin\lambda\cos mt;
\end{aligned}$$

où l'on reconnait la nature elliptique de la courbe. Enfin on aura $\mathfrak{x}_1^{(1)}\,\mathfrak{y}_1^{(1)}\,\mathfrak{z}_1^{(1)}$, soit en continuant d'appliquer la théorie, soit en observant que généralement ces quantités doivent former, pour $x_1 y_1 z_1$, une solution particulière des équations (22.); mais il faut prendre une solution convenable. De l'une ou l'autre manière on trouvera

$$\mathfrak{x}_1^{(0)} = -\frac{Rm}{\varphi}\left(\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{m+n_1}\sin(m+n)t+\frac{\cos^2\frac{\lambda}{2}}{m-n_1}\sin(m-n)t\right),$$

$$\mathfrak{y}_1^{(0)} = -\frac{Rm}{\varphi}\left(\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{m+n_1}\cos(m+n)t-\frac{\cos^2\frac{\lambda}{2}}{m-n_1}\cos(m-n)t\right),$$

$$\mathfrak{z}_1^{(0)} = -\frac{Rm}{\varphi}\frac{\sin\lambda}{m}\cos mt;$$

courbe du même genre que celle de l'exemple précédent et qui se réduirait à un cercle si l'axe de la terre était perpendiculaire au plan de l'écliptique. Cet exemple, pour lequel seulement l'analyse du §. 4 est en défaut, pourrait à la rigueur se déduire du précédent; mais il est plus simple, algébriquement parlant, de le traiter directement. Je l'ai présenté ici parceque sa simplicité relative permet de faire les diverses vérifications qu'on peut souhaiter. C'est ainsi qu'on reconnaitra sans peine la constance du rapport des arcs, laquelle avait été supposée en commençant l'exemple.

Exemple du problème (I). En se reportant tout-à-fait aux notations des §. 1 et 2, je supposerai que les courbes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}_1$ sont deux hélices roulant et glissant uniformément l'une sur l'autre. On pourra prendre pour leurs équations

$$\begin{cases} x = k\cos h\cos nt, \\ y = k\cos h\sin nt, \\ z = (k\sin h)nt, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = l+k_1\cos h_1\cos n_1 t, \\ y_1 = \quad k_1\cos h_1\sin n_1 t, \\ z_1 = \quad (k_1\sin h_1)n_1 t, \end{cases}$$

k, h ... étant des constantes. On aura ici (par exemple par (6.))

$$\begin{cases} ds = kndt, \\ d\omega = (\cos h)n\,dt, \\ dv = (\sin h)n\,dt, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -\cos h\sin nt, \\ \beta = \cos h\cos nt, \\ \gamma = \sin h, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = -\cos nt, \\ \eta = -\sin nt, \\ \zeta = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \sin h\sin nt, \\ \mu = -\sin h\cos nt, \\ \nu = \cos h; \end{cases}$$

et des relations tout-à-fait pareilles pour $\mathfrak{C}_1$. On en conclura, par les formules (4*.), les expressions particulières des cosinus a, b, ..., que je me dispenserai d'écrire. Si l'on suppose ε constant les rotations (10.), (10*.), (11.) seront aussi constantes, ainsi que la vitesse de glissement $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ (13.), ce qu'il était facile de prévoir. L'axe de rotation et de glissement et l'axe géométrique de $\mathfrak{C}_1$ tourneront uniformément autour de l'axe géométrique de $\mathfrak{C}$ avec lequel ils feront des angles constants etc. Quant au lieu $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, on

aura ici

$$\nabla = -l\cos h_1 \sin n_1 t + (k_1 \sin^2 h_1) n_1 t, \qquad 1 - \frac{d\nabla}{ds_1} = \cos h_1 \left(\cos h_1 + \frac{l}{k_1}\cos n_1 t\right),$$

$$R = \sin h_1 \cos h_1 \left(\frac{l}{k_1}\sin n_1 t + n_1 t \cos h_1\right), \qquad \varrho_1 = \frac{k_1}{\cos h_1}.$$

Il n'y aura plus qu'à substituer ces diverses valeurs dans les formules (5.). N'ayant pas actuellement pour objet de discuter le lieu obtenu, je supprime les résultats de ces substitutions.

En donnant aux constantes h, k, ... ε des valeurs convenables les formules obtenues comprendront le cas d'un cercle roulant sur une hélice et celui des épicycloïdes planes ou sphériques.

Le mouvement du système $o_1 x_1 y_1 z_1$ étant actuellement défini par $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ et $(a, b, c, \ldots)$, et φ ayant ici la valeur $\frac{k_1 n_1 - kn}{k_1 n_1}$, on pourra, par le §. 5, obtenir toutes les courbes conjuguées $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$ propres à produire le mouvement donné.

Remarque I. Je termine ici la série des problèmes dont on pourrait augmenter considérablement le nombre en entremêlant, de diverses manières, les quantités x, y, ... a, b, ... introduites tout en commençant et les variables auxiliaires qui se sont offertes dans la solution des questions traitées.

Remarque II. Je crois devoir ajouter un mot sur le problème du §. 4, à cause de son importance mécanique. Sa solution est subordonnée comme je l'ai dit, à la connaissance d'une intégrale particulière de l'équation (16.) ou de l'équation linéaire du second ordre dans laquelle M. *R. Hoppe* l'a transformée. On peut remarquer aussi qu'une équation finie entre X, Y, Z, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, σ, avec ou sans constante arbitraire, qui est vérifiée par les équations (14*.), c'est-à-dire une intégrale quelconque de ces équations, autre que $X^2 + Y^2 + Z^2 =$ constante, doit conduire à la solution particulière requise. Car, en substituant dans cette équation finie les trois premières (20.) et remettant $\sqrt{1 - \mathfrak{P}^2 - \mathfrak{P}'^2}$ au lieu de $(\mathfrak{Q}\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}\mathfrak{Q}')$, on obtiendra une équation du premier ordre en $\mathfrak{P}$, qui devant subsister avec (16.) fournira généralement l'expression finie de cette fonction $\mathfrak{P}$. C'est ainsi que dans le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures, la connaissance d'une des équations intégrales, fournies par le principe des aires, conduirait à la solution particulière qui réduit la question aux quadratures. Au reste, les équations primitives (14.) admettant déjà l'intégrale $X^2 + Y^2 + Z^2 =$ constante, si l'on a une autre intégrale générale $F(X, Y, Z, t) =$ constante, le principe du dernier multiplicateur ramène la dernière intégration

aux quadratures et l'on peut appliquer par exemple, ce qui est dit au tome I, pag. 104 (ex II) des *Math. Werke* de *Jacobi*. La même chose peut se dire à l'égard de la première ligne (6.) où l'on chercherait α, λ, ξ en supposant v fonction de ω. D'ailleurs toute intégrale $F(X, Y, \ldots U, t) =$ constante d'un système d'équations linéaires du 1er ordre et sans termes indépendants de X, Y, $\ldots$ U, étant *nécessairement homogène* par rapport à X, Y, $\ldots$ U, il est toujours permis d'admettre que la constante, si elle n'est pas nulle, a une valeur arbitraire et non déterminée, ce qui peut être nécessaire pour l'application du principe de *Jacobi*. Cette homogénéité des intégrales permet évidemment, quand on connait une solution particulière, d'abaisser d'autant d'unités le nombre des intégrations ultérieures qu'il y a d'unités dans le degré de l'intégrale, supposée algébrique, et en général d'obtenir toutes les intégrations restantes si elle est transcendante. Je pourrai développer ces remarques analytiques dans une autre occasion. J'aurais pu en faire usage dans le problème du §. 4; mais j'ai préféré la marche adoptée parcequ'elle est plus directe et plus symétrique et qu'elle met en jeu les éléments principaux et caractéristiques de la rotation d'un corps.

St. Etienne 1er janvier 1864.

De functione potentiali duarum ellipsoidium homogenearum.

(Auctore *F. Mertens.*)

Ad cognoscendam attractionem, quam duae massae m, m', viribus secundum legem *Newton*ianam agentibus praeditae, altera in alteram, exerceant, determinandas esse sex quantitates easque omnes exprimi posse constat per quotientes differentiales unius functionis a sex constantibus pendentis, quibus situs alterius massae respectu alterius determinetur. Per leges enim staticas tres vires $-X$, $-Y$, $-Z$ secundum axes x, y, z systematis coordinatarum rectilinearum orthogonalium arbitrarii directae punctumque arbitrarium sollicitantes, et tria systemata binarum virium, a Cl. *Poinsot* nomine parium ornata, $-L$, $-M$, $-N$ in planis coordinatarum yz, zx, xy sita inveniri possunt, quibus omnes vires ex attractione singulorum elementorum alterutrius massae e. g. massae m in singula elementa alterius massae m' ortae compensantur. Designatis igitur elementis massae m indefinite per dm, elementis massae m' per dm', denotataque distantia mutua elementorum dm, dm' per (dm, dm'), si massae m' quicunque motus infinite parvus virtualis tribuitur, quem in tres progressus partiales δa, δb, δc secundum axes ipsarum x, y, z directos et tres rotationes δp, δq, δr circa axes coordinatarum x, y, z decomponi posse constat, ex principio velocitatum virtualium habebitur aequatio:

$$\int \frac{\delta(dm, dm')}{(dm, dm')^2} dm\,dm' + X\delta a + Y\delta b + Z\delta c + L\delta p + M\delta q + N\delta r = 0,$$

quae, quum sit

$$\int \frac{\delta(dm, dm')}{(dm, dm')^2} dm\,dm' = -\delta \int \frac{dm\,dm'}{(dm, dm')}$$

in hanc transit

$$X\delta a + Y\delta b + Z\delta c + L\delta p + M\delta q + N\delta r = \delta \int \frac{dm\,dm'}{(dm, dm')}.$$

Ex qua aequatione, determinato situ massae m' respectu massae m per coordinatas (a, b, c) unius ex ejus punctis et per angulos, quos axes systematis coordinatarum orthogonalis immutabiliter cum massa m' conjuncti cum axibus fixi, systematis efficiunt, expressaque functione $\int \frac{dm\,dm'}{(dm, dm')}$ per has quantitates, statim ipsarum X, Y, Z, L, M, N expressiones deducis.

Integrale sextuplex

$$P = \int \frac{dm\,dm'}{(dm, dm')}$$

per utramque massam extendendum, ad quod determinandum totum problema cognoscendae attractionis mutuae duarum massarum m, m' revocatur, legitime ob hanc causam summo *Gauss* duce functio potentialis massarum m et m' appellari potest.

Cl. *Lejeune-Dirichlet* primus problema determinandae actionis mutuae duarum ellipsoidium homogenearum, quod est in mechanica gravissimum, praeclara sua methodo tractavit integraleque P ad integrale duplex reduxit *). Quae tamen disquisitiones a summo geometra nunquam editae sunt.

Quum res mihi gravissima videretur, Clo. *Lejeune-Dirichlet* duce integrale P ad duplex reducere conatus sum eamque, quam inveni, reductionem in sequentibus exponam.

Antequam ad rem ipsam transeam, nonnulla lemmata praemittenda sunt, quibus in sequentibus opus erit.

1.

Lemma I. Quaeritur functio realis argumenti x, quae pro negativis valoribus ipsius x evanescit, pro positivis autem fit $= e^{-kx}x^{m-1}$, designantibus k, m quantitates positivas.

Si m non minor est unitate, talis functio per theorema Cli. *Fourier* est integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{\infty} d\lambda \int_{0}^{\infty} e^{i\lambda(x-\mu)-k\mu}\mu^{m-1}d\mu,$$

quod, adhibita formula *Euler*iana

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(k+i\lambda)\mu}\mu^{m-1}d\mu = \frac{\Gamma(m)}{(k+i\lambda)^m},$$

transit in hoc:

$$\frac{\Gamma(m)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\lambda e^{i\lambda x}}{(k+i\lambda)^m}.$$

Quae functionis quaesitae expressio statim extenditur ad valores ipsius m unitate minores, si integrale

$$\frac{\Gamma(m+1)}{2\pi}\int_{-x}^{\infty}\frac{d\lambda e^{i\lambda x}}{(k+i\lambda)^{m+1}},$$

*) „Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale", § 6 in commentationibus Academiae scientiarum regiae Berolinensis 1839.

integratione per partes instituta, transformatur in hoc:

$$x \cdot \frac{\Gamma(m)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda e^{i\lambda x}}{(k+i\lambda)^m} \text{ *)}.$$

Integrale

$$\frac{\Gamma(m)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda e^{(k+i\lambda)x}}{(k+i\lambda)^m}$$

igitur pro negativis ipsius x valoribus evanescit, pro positivis autem fit $= x^{m-1}$.

Lemma II. Concipiatur superficies sphaerica S radio 1 circa initium systematis coordinatarum rectangularum descripta designenturque coordinatae puncti indefiniti superficiei S per ξ, η, ζ, ita ut sit $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$; sit $d\sigma$ elementum hujus superficiei, cui inest punctum $(\xi\eta\zeta)$, sintque denique A, B, C quantitates reales. Quibus positis, in formula Cli. *Poisson*

$$\iint F(A\xi+B\eta+C\zeta)\,d\sigma = 2\pi \int_{-1}^{1} F(\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mu)\,d\mu,$$

in qua integrale laevi membri per totam superficiem S extendendum est, supponas, functionem $F(x)$ pro positivis valoribus ipsius x esse $= x^{-n}$, designante n numerum positivum inter limites 0 et 1 contentum, pro negativis autem valoribus evanescere, ita ut sit

$$\int_{-1}^{1} F(\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mu)\,d\mu = \frac{1}{1-n}(A^2+B^2+C^2)^{-\frac{n}{2}},$$

et proin

$$(A^2+B^2+C^2)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1-n}{2\pi}\iint F(A\xi+B\eta+C\zeta)\,d\sigma.$$

Ex lemmate I. colligis pro omnibus ipsius x valoribus esse

$$F(x) = \frac{\Gamma(1-n)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl e^{(k+li)x}}{(k+li)^{1-n}}.$$

Quare obtinebis

$$(A^2+B^2+C^2)^{-\frac{n}{2}} = \frac{\Gamma(2-n)}{4\pi^2}\iint d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl e^{(k+li)(A\xi+B\eta+C\zeta)}}{(k+li)^{1-n}}.$$

Lemma III. Quaeritur valor integralis

$$J = \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-(k+\lambda i)f(x,y,z)+2(Ax+By+Cz)}\,dx\,dy\,dz,$$

---

*) Cf. Cli. *Dirichlet* commentationem: Note sur les intégrales définies, in tomo IV. hujus Diarii.

in quo k est constans positiva et $f(x, y, z)$ functio homogenea secundi ordinis variabilium x, y, z semper positiva manens.

Si functio $f(x, y, z)$ forma simplicissima $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2$ gaudet, integrationes singulae perfici possunt, et obtines

$$J = \left(\frac{\pi}{k+i\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{\left(\frac{A^2}{\alpha}+\frac{B^2}{\beta}+\frac{C^2}{\gamma}\right)\frac{1}{k+i\lambda}}}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}},$$

sive, si generaliter determinans formae quadraticae $\varphi(x, y, z)$ per $\Delta(\varphi)$ formaque adjuncta per φ' designantur,

$$J = \left(\frac{\pi}{k+i\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{f'(A,B,C)}{\Delta(f)}\frac{1}{k+i\lambda}}}{\sqrt{\Delta(f)}}.$$

Quae ipsius J expressio statim ad casum extenditur, quo functio $f(x, y, z)$ forma generalissima gaudet, si per substitutionem linearem orthogonalem functio $f(x, y, z)$ redigitur in formam $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2$, et si perpenditur, $\Delta(f)$ esse invariantem functionis f, $f'(A, B, C)$ vero invariantem systematis functionum $f(x, y, z)$, $Ax+By+Cz$.

Lemma IV. Designante k constantem positivam, formulae

$$e^{\frac{g^2p^2}{k+\lambda i}} = \sqrt{\frac{k+\lambda i}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{-(k+i\lambda)s^2+2gps}$$

ope fit integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda e^{k+\lambda i+\frac{g^2p^2}{k+\lambda i}}}{(k+\lambda i)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2gps}\, ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda e^{(k+\lambda i)(1-s^2)}}{(k+\lambda i)^2},$$

et secundum lemma I.

$$= 2\sqrt{\pi} \int_{-1}^{1} e^{2gps}(1-s^2)\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2pg^3} \frac{\partial}{\partial p} \frac{e^{2gp}-e^{-2gp}}{p}.$$

2.

Ad propositum meum transiens primo casum eum considerabo, quo alterius ellipsoidis omnes dimensiones evanescunt, sive quo determinanda est attractio ellipsoidis in punctum materiale, et ostendam, loco factoris discontinui, quo Cl. *Dirichlet* in hoc problemate tractando usus sit, alium adhiberi posse illi quibusdam ex causis praeferendum.

Data sit ellipsoides

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

impleta massa densitatis $\varrho = \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2}\right)^{m-1}$, designante m numerum unitate majorem. Cujus attractio in punctum materiale quodlibet (a, b, c) ut cognoscatur, eruendum est integrale

$$V = \int \frac{\varrho\, dx\, dy\, dz}{r^n}$$

per totum corpus ellipsoidicum extendendum, in quo

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

et numerus n inter limites 0 et 3 contentus supponitur.

Expressa secundum lemma I. densitate ϱ per integrale discontinuum

$$\varrho = \frac{\Gamma(m)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda\, e^{(k+i\lambda)\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2}\right)}}{(k+i\lambda)^m},$$

poni poterit:

$$V = \frac{\Gamma(m)}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\, dy\, dz}{r^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda\, e^{(k+i\lambda)\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2}\right)}}{(k+i\lambda)^m}.$$

In quo integrali, quum sensum determinatum retineat, etiamsi elemento valorem ejus absolutum substituas, ordo integrationum interverti potest, ita ut habeas

$$V = \frac{\Gamma(m)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda\, e^{k+i\lambda}}{(k+i\lambda)^m} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\, dy\, dz\, e^{-(k+i\lambda)\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}\right)}}{r^n}.$$

Si perpenderis, k esse constantem positivam, quantitatem r^{-n} per formulam *Euler*ianam ita exhibere poteris:

$$r^{-n} = \frac{(k+i\lambda)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds\, e^{-\frac{k+i\lambda}{s}((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)}}{s^{1+\frac{n}{2}}}.$$

Qua expressione substituta, fit:

$$V = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda\, e^{k+i\lambda}}{(k+i\lambda)^{m-\frac{n}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{PQR}{s^{1+\frac{n}{2}}}\, ds,$$

ubi brevitatis gratia positum est:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-(k+i\lambda)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{(x-a)^2}{s}\right)},$$

et Q, R ex P oriuntur mutando α, a in β, b; γ, c.

Valor ipsius P formulae Cli. *Laplace* ope invenitur

$$= \sqrt{\frac{\pi}{k+i\lambda}} \sqrt{\frac{s}{1+\frac{s}{\alpha^2}}}\, e^{-(k+i\lambda)\frac{a^2}{\alpha^2+s}}.$$

Quare, si ponitur

$$D = \left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right), \quad S(s) = \frac{a^2}{\alpha^2+s}+\frac{b^2}{\beta^2+s}+\frac{c^2}{\gamma^2+s},$$

fit:

$$V = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\lambda\, e^{k+i\lambda}}{(k+i\lambda)^{m+\frac{3-n}{2}}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(k+i\lambda)S}s^{\frac{1-n}{2}}ds}{\sqrt{D}},$$

et integrationum ordine interverso,

$$V = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}\frac{s^{\frac{1-n}{2}}ds}{\sqrt{D}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\lambda\, e^{(k+i\lambda)(1-S)}}{(k+i\lambda)^{m+\frac{3-n}{2}}}.$$

Integratio ad variabilem λ spectans, lemmate I. adhibito, statim perficitur. Quo facto obtines

$$V = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{3-n}{2}\right)}\int^{\infty}\frac{s^{\frac{1-n}{2}}(1-S)^{m+\frac{1-n}{2}}ds}{\sqrt{D}},$$

ubi limes inferior integralis aut evanescit aut positivam radicem aequationis $S(s)=1$ aequat, prout $S(0)<1$ aut $S(0)>1$, i. e. prout punctum attractum aut intra aut extra ellipsoidem situm est.

Generalius sit densitas ellipsoidis propositae

$$\varrho = \varrho\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right).$$

Expressa ϱ per integrale discontinuum

$$\varrho = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_0^1\varrho(\mu)\,d\mu\, e^{(k+i\lambda)\left(\mu-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}\right)},$$

obtinebis

$$V = \frac{1}{2\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy\,dz}{r^n}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_0^1\varrho(\mu)\,d\mu\, e^{(k+i\lambda)\left(\mu-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}\right)}.$$

Simili modo ut Cl. *Dirichlet* in commentatione supra laudata demonstrare potes, integrationum ordinem in hac formula intervertere licere, e. g. considerando

V (i. q. licet) tanquam limitem integralis

$$V(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy\,dz}{r^n}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\, e^{-\varepsilon\lambda^2}\int_0^1\varrho(\mu)\,d\mu\, e^{(k+i\lambda)\left(\mu-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}\right)}$$

pro $\varepsilon = 0$, designante ε quantitatem positivam.

Interversis integrationibus, fit

$$V(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\, e^{-\varepsilon\lambda^2}\int_0^1\varrho(\mu)\,d\mu\, e^{(k+i\lambda)\mu}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy\,dz\, e^{-(k+i\lambda)\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)}}{r^n},$$

et peractis integrationibus secundum x, y, z eodem modo ac supra,

$$V(\varepsilon) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}\frac{s^{\frac{1-n}{2}}ds}{\sqrt{D}}\int_0^1\varrho(\mu)\,d\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\lambda\, e^{(k+i\lambda)(\mu-S)-\varepsilon\lambda^2}}{(k+i\lambda)^{\frac{3-n}{2}}}.$$

In qua formula, quum $n<3$ supponatur, $\varepsilon = 0$ poni potest; quo facto, ex lemmate I. erit

$$V = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-n}{2}\right)}\int_S^{\infty}\frac{s^{\frac{1-n}{2}}ds}{\sqrt{D}}\int_S^1\varrho(\mu)(\mu-S)^{\frac{1-n}{2}}d\mu,$$

ubi S et limes inferior integralis ad variabilem s spectantis eadem atque antea definitione gaudent.

3.

Concipiatur in ellipsi focali ad ellipsoidem propositam pertinente, cujus aequatio, si $\alpha \geqq \beta > \gamma$, erit

$$\frac{x^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{y^2}{\beta^2-\gamma^2} = 1$$

massa densitatis $\varphi\left(\frac{x^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{y^2}{\beta^2-\gamma^2}\right)$ secundum legem eandem atque antea attrahens distributa, indageturque ejus potentiale W in puncto (a, b, c).

Simili prorsus modo ac supra eruitur

$$W = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)}\int_\tau^{\infty}\frac{t^{-\frac{n}{2}}dt}{\sqrt{\left(1+\frac{t}{\alpha^2-\gamma^2}\right)\left(1+\frac{t}{\beta^2-\gamma^2}\right)}}\int_T^1\frac{\varphi(\mu)\,d\mu}{(\mu-T)^{\frac{n}{2}}},$$

in qua formula

$$T = \frac{a^2}{\alpha^2-\gamma^2+t}+\frac{b^2}{\beta^2-\gamma^2+t}+\frac{c^2}{t},$$

et τ aut evanescit aut radix positiva aequationis $T=1$ est, prout $T(0)<1$ aut $T(0)>1$.

Posito $t=s+\gamma^2$, fit

$$W = \sin\frac{n\pi}{2}\,\frac{\sqrt{(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)}}{\alpha\beta\gamma}\int_{\sigma}^{\infty}\frac{(s+\gamma^2)^{\frac{1-n}{2}}\,ds}{\sqrt{D}}\int_{S}^{1}\frac{\varphi(\mu)\,d\mu}{(\mu-S)^{\frac{n}{2}}},$$

ubi S, D easdem, quas supra, quantitates exhibent et σ aut $-\gamma^2$ aut positivam radicem aequationis $S(s)=1$ aequat, prout $S(-\gamma^2)<1$ aut $S(-\gamma^2)>1$.

Qua formula cum expressione ipsius V supra eruta comparata, invenies, W et V pro omnibus punctis extra ellipsoidem sitis identicas fore, si posueris

$$n=1, \qquad \varphi(\mu)=\frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}\int_{\mu}^{1}\frac{\varrho(u)}{\sqrt{u-\mu}}\,du.$$

Quum facile demonstres, esse insuper

$$\int\varrho\Big(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\Big)dx\,dy\,dz = \int\varphi\Big(\frac{x^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{y^2}{\beta^2-\gamma^2}\Big)dx\,dy,$$

integratione a laeva per totam ellipsoidem, a dextra per ellipsem focalem extensa, sive massam ellipsoidis aequalem esse massae in ellipsi distributae, hoc corollarium sive, si mavis, novam expressionem theorematis Cli. *Maclaurin* obtines.

Attractio ellipsoidis $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ impletae massa densitatis $\varrho\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)$ in punctum externum eadem est atque attractio ellipsis focalis correspondentis, si in hac massa ellipsoidis densitate

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}\int_{\left(\frac{x^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{y^2}{\beta^2-\gamma^2}\right)}^{1}\frac{\varrho(u)\,du}{\sqrt{u-\frac{x^2}{\alpha^2-\gamma^2}-\frac{y^2}{\beta^2-\gamma^2}}}$$

distribuitur.

Si ellipsoides est sphaeroides oblongata

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2+z^2}{\beta^2}=1,$$

massa ellipsoidis densitate

$$\frac{\pi\alpha\beta^2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\int_{\frac{x^2}{\alpha^2-\beta^2}}^{1}\varrho(u)\,du$$

in linea distribuenda est, quae hoc casu ellipsis focalis partes agit.

4.

Theorematis in articulo praecedente eruti ope functio potentialis duarum ellipsoidium eo casu, ubi altera ellipsoides extra alteram jacet, statim revocatur ad integrale quadruplex. Patet enim hoc casu utrique ellipsoidi substitui posse ellipsem focalem correspondentem, massa ellipsoidis rite in eadem distributa, foreque integrale sextuplex

$$\int \frac{dm\,dm'}{(dm, dm')}$$

aequale integrali quadruplici

$$\int \frac{dm\,dm'}{(dm, dm')}$$

ad ellipses focales relato.

Sed ut integrale P ad duplex revocem simulque omnes casus, quos situs alterius massae respectu alterius praebere possit, amplectar, directe integrale sextuplex tractare malo.

5.

Sint aequationes ellipsoidium propositarum, ad quodcunque systema coordinatarum orthogonale relatae,

$$f(x-a, y-b, z-c) = 1, \qquad f'(x'-a', y'-b', z'-c') = 1,$$

designantibus f, f' functiones integras homogeneas secundi ordinis.

Ut calculus facilior evadat, loco integralis P aliud considerabo

$$P_n = \int \frac{dm\,dm'}{(dm, dm')^n},$$

in quo n est numerus inter limites 0 et 1 contentus. Exprimantur differentialia dm, dm' per coordinatas x, y, z, x', y', z' ita, ut suppositis utriusque ellipsoidis densitatibus $= 1$ (id quod licet) sit

$$dm = dx\,dy\,dz, \qquad dm' = dx'dy'dz'$$

et

$$P_n = \int \frac{dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Introductis novis variabilibus,

$$x-a = u,\ y-b = v,\ z-c = w;\ x'-a' = -u',\ y'-b' = -v',\ z'-c' = -w'$$

fit:

$$P_n = \int \frac{du\,dv\,dw\,du'\,dv'\,dw'}{((u+u'+a-a')^2 + (v+v'+b-b')^2 + (w+w'+c-c')^2)^{\frac{n}{2}}},$$

ubi integrationes definiuntur conditionibus

$$f(u, v, w) < 1, \qquad f'(u', v', w') < 1.$$

Quum n inter limites 0 et 1 versetur, ex lemmate II., positis brevitatis gratia

$$\xi u + \eta v + \zeta w = L, \qquad \xi u' + \eta v' + \zeta w' = L',$$
$$(a-a')\xi + (b-b')\eta + (c-c')\zeta = q,$$

quantitatis $((u+u'+a-a')^2+(v+v'+b-b')^2+(w+w'+c-c')^2)^{-\frac{n}{2}}$ haec petitur expressio:

$$\frac{\Gamma(2-n)}{4\pi^2}\iiint d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl\, e^{(k+il)(L+L'+q)}}{(k+il)^{1-n}},$$

qua substituta, P_n transformatur in

$$\frac{\Gamma(2-n)}{4\pi^2}\int du\, dv\, dw\, du'\, dv'\, dw' \iiint d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl\, e^{(k+il)(L+L'+q)}}{(k+il)^{1-n}}.$$

Ne dubium sit, an salvo ipsius P_n valore in hoc integrali integrationum ordo mutetur, consideretur P_n, quod licere facile patet, tanquam limes integralis

$$P_n(\varepsilon) = \frac{\Gamma(2-n)}{4\pi^2}\int du\, dv\, dw\, du'\, dv'\, dw' \iiint d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl\, e^{-\varepsilon l^2+(k+li)(L+L'+q)}}{(k+li)^{1-n}}$$

pro $\varepsilon = 0$, designante ε constantem positivam.

Interversis integrationibus fit:

$$P_n(\varepsilon) = \frac{\Gamma(2-n)}{4\pi^2}\iiint d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{QQ'\, dl\, e^{-\varepsilon l^2+(k+il)q}}{(k+il)^{1-n}},$$

ubi brevitatis gratia posui

$$Q = \int du\, dv\, dw\, e^{(k+il)L}, \qquad Q' = \int du'\, dv'\, dw'\, e^{(k+il)L'}.$$

Integralium Q, Q' valores per transformationes coordinatarum facile inveniuntur; sed calculus elegantior evadit in auxilium vocato factore discontinuo. Per lemma I. integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda\, e^{(k+i\lambda)(1-f(u,v,w))}}{k+i\lambda}$$

extra ellipsoidem $f(u, v, w) = 1$ evanescit, sed intra eam valore 1 gaudet. Quare habebis

$$Q = \frac{1}{2\pi}\overline{\iiint}_{-\infty}^{+\infty} du\, dv\, dw\, e^{(k+il)L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda\, e^{(k+i\lambda)(1-f(u,v,w))}}{k+i\lambda},$$

et integrationum ordine interverso,

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda\, e^{k+i\lambda}}{k+i\lambda} \overline{\iiint}_{-\infty}^{+\infty} du\, dv\, dw\, e^{-(k+i\lambda)f(u,v,w)+(k+il)L}$$

Hinc, designata forma adjuncta formae quadraticae f per F nec non determinante per D, lemmatis III. ope deducis respecta significatione ipsius L

$$Q = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{D}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda\, e^{k+i\lambda+\frac{1}{k+i\lambda}\frac{(k+il)^2F'(\xi,\eta,\zeta)}{4D}}}{(k+i\lambda)^{\frac{5}{2}}},$$

et lemmate IV. adhibito positoque

$$p = \sqrt{\frac{F(\xi,\eta,\zeta)}{D}},$$

$$Q = \frac{2\pi}{\sqrt{D}}\frac{1}{p(k+il)^3}\frac{\partial}{\partial p}\frac{e^{(k+il)p}-e^{-(k+il)p}}{p}.$$

Eodem prorsus modo, designata forma adjuncta formae f' per F' nec non determinante per D', positoque

$$p' = \sqrt{\frac{F'(\xi,\eta,\zeta)}{D'}},$$

invenis:

$$Q' = \frac{2\pi}{\sqrt{D'}}\frac{1}{p'(k+il)^3}\frac{\partial}{\partial p'}\frac{e^{(k+il)p'}-e^{-(k+il)p'}}{p'}.$$

Substitutis ipsorum Q, Q' valoribus, fit

$$P_n(\varepsilon) = \frac{\Gamma(2-n)}{\sqrt{DD'}}\iint\frac{d\sigma}{pp'}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\varepsilon l^2+(k+li)q}}{(k+il)^{7-n}}\frac{\partial}{\partial p}\frac{e^{(k+li)p}-e^{-(k+li)p}}{p}\frac{\partial}{\partial p'}\frac{e^{(k+li)p'}-e^{-(k+li)p'}}{p'}dl.$$

Ut limitem ipsius $P_n(\varepsilon)$ pro $\varepsilon=0$ obtineas, manifesto in hac formula licet ponere $\varepsilon=0$. Quo facto, fit

$$P_n =$$

$$\frac{\Gamma(2-n)}{\sqrt{DD'}}\iint\frac{d\sigma}{pp'}\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial p'}\frac{1}{pp'}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(k+il)(q+p+p')}+e^{(k+il)(q-p-p')}-e^{(k+il)(q+p-p')}-e^{(k+il)(q-p+p')}}{(k+il)^{7-n}}dl.$$

Adhibito lemmate I., tandem eruitur

$$P_n = \frac{2\pi}{\sqrt{DD'}}\frac{\Gamma(2-n)}{\Gamma(7-n)}\Big[\iint\frac{1}{pp'}\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial p'}\frac{(q+p+p')^{6-n}}{pp'}d\sigma+\iint\frac{1}{pp'}\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial p'}\frac{(q-p-p')^{6-n}}{pp'}d\sigma$$
$$-\iint\frac{1}{pp'}\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial p'}\frac{(q+p-p')^{6-n}}{pp'}d\sigma-\iint\frac{1}{pp'}\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial p'}\frac{(q-p+p')^{6-n}}{pp'}d\sigma\Big].$$

In prima harum quatuor expressionum integrationes eam superficiei sphaericae S partem amplectuntur, in qua functio $q+p+p'$ valoribus positivis gaudet, et similiter in reliquis. Transcendens I' ex expressione ipsius P_n omnino abit.

Si functionem P pro casu legis *Newton*ianae habere vis, perpendas, tum functionem P_n, tum expressionem pro ea erutam, esse functiones continuas ipsius n in propinquitate valoris $n=1$.

6.

Quo melius indoles formulae in articulo praecedente erutae perspiciatur, inquirendum est in significationem geometricam quantitatum p, p', q.

Facillime invenitur, p, p' resp. esse distantias centrorum ellipsoidium f, f' a planis tangentibus normaliter ad radium (ξ, η, ζ) ductis, quantitatem q vero projectionem distantiae mutuae centrorum ellipsoidium in eundem radium.

Jam distinguantur tres casus:

1°. Si altera ellipsoides penitus intra alteram sita est, e. g. f' intra f, statim patet, quantitates $p+p'+q$, $p-p'+q$ in tota superficie sphaerica S fore positivas, quantitates $q-p-p'$, $q-p+p'$ vero negativas; alioquin enim ellipsoides f, f' plana tangentia communia haberent. Quare hoc casu ex expressione ipsius P integrale secundum et quartum abeunt, duoque reliqua ad totam superficiem S extenduntur. Omissis partibus evanescentibus, fit

$$P = \frac{2\pi}{15}\frac{1}{\sqrt{DD'}}\iint\left(\frac{5}{p}-\frac{p'^2+5g^2}{p^3}\right)d\sigma$$

et, una integratione peracta,

$$P = \frac{4\pi^2}{3\sqrt{DD'}}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\Delta(p^2+sx^2+sy^2+sz^2)}} + \frac{8\pi^2}{15\sqrt{DD'}}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\Delta(p^2+\mu p'^2+5\mu q^2+sx^2+sy^2+sz^2)}}\right]_{\mu=0},$$

ubi, ut in lemmate III., $\Delta(\varphi)$ denotat determinantem formae quadraticae φ. Quae formula etiam alia via derivari potest.

2°. Si ellipsoides partem communem habent, quantitas $p+p'+q$ in tota superficie S positiva, quantitas $q-p-p'$ vero negativa est. Neque enim exstant hoc casu plana tangentia communia inter ellipsoides f, f' transeuntia. Contra functiones $q+p-p'$, $q-p+p'$ in superficie S signa mutant. Accuratiorem hujus casus, quum minimi sit momenti, analysin omittam.

3°. Si altera ellipsoides extra alteram jacet, quantitates $q+p+p'$, $q-p-p'$, $q-p+p'$, $q+p-p'$ omnes in superficie sphaerica S signa mutant. Fines, quibus valores positivi a valoribus negativis secernuntur, sunt curvae sphaericae quarti ordinis, quas rectae per centrum sphaerae S ad omnia ellipsoidium f, f' plana tangentia communia normaliter ductae e superficie S exsecant.

Quamvis satis complicata videatur esse ipsius P expressio, tamen hoc casu omnia integralia in ea contenta ad integralia simplicia reduci possunt. Supponas enim, aequationem ellipsoidis f esse

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

et axes α, β, γ ita comparatas esse, ut sit $\alpha \geqq \beta > \gamma$. Substituas secundum theorema in art. 3. prolatum ellipsoidi f ellipsem ejus focalem ponasque

$$\xi = \sin\vartheta\cos\psi, \quad \eta = \sin\vartheta\sin\psi, \quad \zeta = \cos\vartheta.$$

Quibus factis, erit

$$p = \sin\vartheta\sqrt{(\alpha^2-\gamma^2)\cos^2\psi+(\beta^2-\gamma^2)\sin^2\psi}.$$

Quare si loco ipsius ϑ per aequationem $\operatorname{tg}\vartheta = u$ variabilem u introduxeris, omnia differentialia, quae in expressione ipsius P sub signis integrationis inveniuntur, functiones rationales quantitatum u et $\sqrt{F'(u\cos\psi, u\sin\psi, 1)}$ erunt, ita ut omnes integrationes ad variabilem u spectantes perfici possint.

Sed nimis molestum esset hac via integrale P ad simplex reducere, praestatque methodo directa uti, quam suppeditat distantiae duorum punctorum reciprocae expressio peculiaris, alia occasione oblata, a me tradenda.

Druckfehlerverzeichniss.

Band 61, pag. 353. In der dritten in der Anmerkung vorkommenden Determinante μ^{ter} Ordnung müssen die $k(\mu-k)$ Elemente, welche zugleich in den letzten $\mu-k$ Horizontalreihen und in den ersten k Verticalreihen stehen, also die Grössen

$$\begin{matrix} b_1^{k+1} & \ldots\ldots & b_k^{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^{\mu} & \ldots\ldots & b_k^{\mu} \end{matrix}$$

durch lauter Nullen ersetzt werden.

Band 62, pag. 6, Zeile 6 v. u. Statt $\frac{\omega^2}{2}\cos^2\vartheta.r^2$ lese man $\frac{\omega^2}{2}\sin^2\vartheta.r^2$.

- - pag. 8, Zeile 3 v. o. In Formel (5.) fehlt das Differential $d\beta$ unter dem zweiten Integrale.

- - pag. 11, Zeile 10 v. o. In Formel (5*.) lese man unter dem zweiten Integralzeichen $\frac{d(Y_n(\beta)\beta^{n+3})}{d\beta}$ statt $\frac{d(Y_n(\beta)^{n+3}\beta)}{d\beta}$.

- - pag. 32, Zeile 16 v. o.
- - pag. 33, Zeile 8 v. o. } Statt 0,0000739213 lese man 0,0000729213.

- - pag. 177, Zeile 5 v. u. Statt la ligne de striction lese man une sorte d'arête de rebroussement.

Band 63, pag. 287. Ueberall auf dieser Seite mit Ausnahme der Formel (18.) sind die unteren Indices der A zu vertauschen.

Preisfragen

der physikalisch-mathematischen Klasse

der

Königlich Preussischen

Akademie der Wissenschaften

für die Jahre 1866 und 1867.

Bekannt gemacht in der öffentlichen Sitzung am Leibnizischen Jahrestage den 7. Juli 1864.

I.

(Aus dem *Steiner*schen Legate.)

In einer in den Monatsberichten der Akademie vom Januar 1856, sowie in dem 53. Bande des *Crelle*schen Journals veröffentlichten Abhandlung hat *Steiner* eine Reihe von Fundamental-Eigenschaften der Flächen dritten Grades mitgetheilt, und dadurch den Grund zu einer rein geometrischen Theorie derselben gelegt. Die Akademie wünscht, dass diese ausgezeichnete Arbeit des grossen Geometers nach synthetischer Methode weiter ausgeführt und in einigen wesentlichen Punkten vervollständigt werde. Dazu würde es zunächst nothwendig sein, die grösstentheils nur angedeuteten oder ganz fehlenden Beweise der aufgestellten Hauptsätze zu geben; dann aber müsste die Untersuchung auch auf die von *Steiner* nicht berücksichtigten Fälle, in denen die zur geometrischen Construction der in Rede stehenden Flächen dienenden Elemente zum Theil imaginär sind, ausgedehnt werden. Ausserdem ist eine genaue Charakterisirung der verschiedenen Gattungen von Raumcurven, in welchen zwei solche Flächen sich schneiden können, zwar nicht unumgänglich erforderlich, würde aber von der Akademie als eine wichtige Ergänzung der *Steiner*schen Theorie betrachtet werden.

Die ausschliessende Frist für die Einsendung der dieser Aufgabe gewidmeten Schriften, welche nach der Wahl der Bewerber in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache abgefasst sein können, ist der erste März 1866. Jede Bewerbungsschrift ist mit einem Motto zu versehen und dieses auf dem Aeussern des versiegelten Zettels,

welcher den Namen des Verfassers enthält, zu wiederholen. Die Ertheilung des Preises von 600 Thalern geschieht in der öffentlichen Sitzung am Leibnizischen Jahrestage im Monat Juli des Jahres 1866.

II.

Die Theorie der elliptischen und *Abel*schen Functionen, welche schon jetzt fast in allen Theilen der Mathematik die Lösung von Aufgaben möglich gemacht hat, für welche die früher der Analysis zu Gebote stehenden Hülfsmittel nicht ausreichten, ist ohne Zweifel noch zahlreicher weiterer Anwendungen fähig; und es stellt daher die Akademie folgende Preisfrage:

„Es soll irgend ein bedeutendes Problem, dessen Gegenstand der Algebra, Zahlen-
„Theorie, Integral-Rechnung, Geometrie, Mechanik und mathematischen Physik
„angehören kann, mit Hülfe der elliptischen oder der *Abel*schen Transcendenten
„vollständig gelöst werden."

Die ausschliessende Frist für die Einsendung der dieser Aufgabe gewidmeten Schriften, welche nach der Wahl der Bewerber in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache abgefasst sein können, ist der 1. März 1867. Jede Bewerbungsschrift ist mit einem Motto zu versehen und dieses auf dem Aeussern des versiegelten Zettels, welcher den Namen des Verfassers enthält, zu wiederholen. Die Ertheilung des Preises von 100 Ducaten geschieht in der öffentlichen Sitzung am Leibnizischen Jahrestage im Monat Juli des Jahres 1867.